

4.2 Wellen

Schwingungen – period. wechselnde Zustände eines physikalischen Systems



- Periodische Vorgänge an „**einem Ort**“
- Energie wird periodisch zwischen verschiedenen Formen umgewandelt

Wellen - Schwingungen, die sich im Raum ausbreiten

Beispiele ...

- Wasserwellen
- Seilwellen
- Elektromagn. Wellen (Licht, Radio-Wellen, ...)
- Signale auf Kabeln (Koaxialkabel, ...)
- Materiewellen (Elektronen, Neutronen, ...)
- Schallwellen (Ultraschall, Körperschall ...)
- Stoßwellen
- Erdbebenwellen
- Kette aus gekoppelten Pendeln
- „Schunkel-Welle“ im Bierzelt

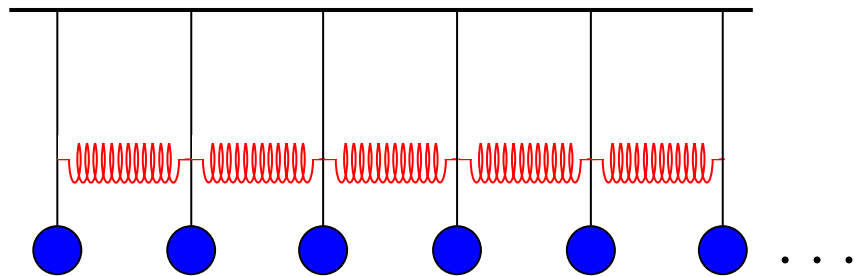
4.2.1 Wellenausbreitung

In diesem Kapitel sollen zunächst allgemein die wichtigsten Begriffe der eindimensionalen Wellenausbreitung dargestellt werden. Anschließend (4.2.1.1...) werden spez. Wellen behandelt (und dabei jeweils die Ausbreitungsgeschw. berechnet!).

Phänomenologie der Wellenausbreitung

Beispiel gek. Pendel:

Fadenpendel
(schwingungsfähige Systeme), Kopplung durch Federn



Auslenkung von Pendel ① bedingt mit zeitl. Verzögerung die Auslenkung von Pendel ②
Auslenkung von Pendel ② bedingt mit zeitl. Verzögerung die Auslenkung von Pendel ③



Zeitabhängige Veränderung einer physikalischen Größe („Störung“)



Kopplung einzelner schwingungsfähiger Teile



Ausbreitung der Störung im Raum



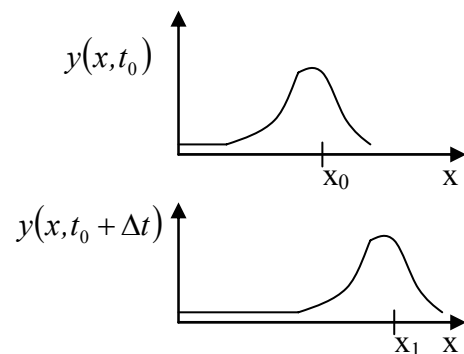
Transport von Energie (ohne Transport von Materie)

Wellenausbreitung ist mit Transport von **Energie** verbunden. Charakteristisch ist dabei, daß Energie zwischen versch. Energieformen ausgetauscht wird (siehe auch harm. Oszillator, Kap. 4.1.1 !).

Beispiele:

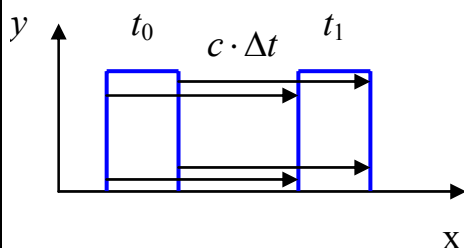
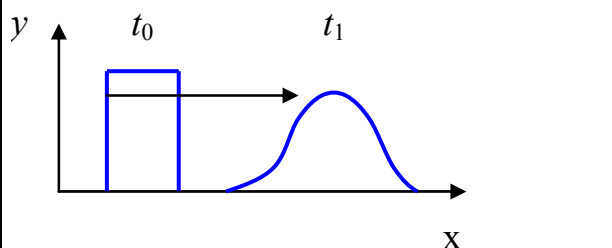
- Welle auf Seil (→ 4.2.1.1)
 - Auslenkung $y(x,t)$ \Rightarrow pot. Energie
 - Geschwindigkeit $v_y(x,t)$ \Rightarrow kin. Energie
- Schallwelle (→ 4.2.1.2)
 - Druck $p(x,t)$ \Rightarrow pot. Energie
 - Schallschnelle $v(x,t)$ \Rightarrow kin. Energie
- elektromagn. Welle (→ 4.2.1.3)
 - E-Feld $\vec{E}(x,t)$ \Rightarrow elektr. Feldenergie
 - B-Feld $\vec{B}(x,t)$ \Rightarrow magn. Feldenergie
- Welle (Signal) auf Kabel (→ 4.2.1.4)
 - Spannung $U(x,t)$ \Rightarrow elektr. Feldenergie (in Kapazität)
 - Strom $I(x,t)$ \Rightarrow magn. Feldenergie (in Induktivität)

➤ **Ausbreitungsgeschwindigkeit:**



„Störung“ breitet sich im Raum aus

$$\text{Geschw.: } c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \quad [\text{Gl.4.2.1.}]$$

Zu unterscheiden : verschiedene Teile der Welle haben ...	
a) alle <u>gleiche</u> Geschw. $c = \text{const.}$	b) <u>verschiedene</u> Geschw. $c \neq \text{const.}$
	
<ul style="list-style-type: none"> • keine Dispersion • Alle Punkte um $c \cdot \Delta t$ verschoben • <u>Form</u> bleibt konst. 	<ul style="list-style-type: none"> • Dispersion • Störungen mit versch. Form haben versch. Geschw.! • Form ändert sich
$y(x,t) = y(x - c \cdot t)$	$y(x,t) = \dots$ (Fkt. von 2 Veränderl.!)
Bsp.: Licht im Vakuum	Bsp.: Licht in Glas (LWL-Kabel)

Wenn keine Dispersion auftritt, so kann die Ausbreitung der Störung in Raum (x) und Zeit (t), die zunächst von beiden Veränderlichen (x und t) abhängt, durch eine Funktion einer einzelnen Veränderlichen beschrieben werden: $y(x,t) = y(x - c \cdot t)$, d.h. um „ $y(x,t)$ “ zu verschiedenen Zeitpunkten zu erhalten, muß man nur den Wellenzug entlang der x -Achse um $c \cdot \Delta t$ verschieben!

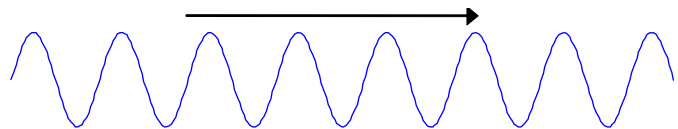
Jede beliebige Wellenform kann als Überlagerung von harm. Funktionen dargestellt werden (Fourieranalyse!).

Dispersion tritt dann auf, wenn die Geschwindigkeit c der einzelnen Fourierkomponenten von der Frequenz (bzw. Wellenlänge) abhängt ($c = c(\omega)$, $\frac{dc}{d\omega} \neq 0$)

Von besonderer Bedeutung sind deshalb wieder die ...

➤ **Harmonische(n) Wellen**

$y = y(x - c \cdot t)$: harmon. Funktion, $\sin/\cos, e^{j\dots}$.



Aus Dimensionsgründen muß im Argument noch ein Faktor („ k “, Einheiten: 1/m) auftreten:

$$y(x,t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot (x - c \cdot t))$$

bzw. $y(x,t) = y_0 \cdot e^{j(k(x-c \cdot t))}$

k : Kreiswellenzahl $[k] = \frac{1}{m}$
--

[Gl.4.2.2.]

Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit eines Punktes mit konstanter Phase („ $k \cdot (x - c \cdot t)$ “)

$$x - c \cdot t = \text{const.}$$

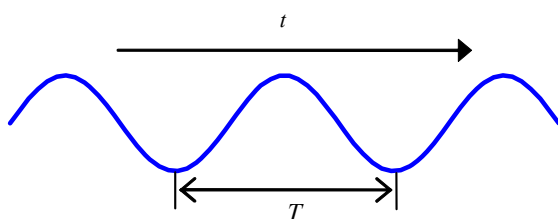
$$x = \text{const.} + c \cdot t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = c$$

☞ „ c “ in $\cos(k(x - c \cdot t))$ bzw. $e^{j \cdot k(x - c \cdot t)}$ ist die **Phasengeschwindigkeit**

Harmonische Fkt. beschreibt Ausbreitung in in Raum (x) und Zeit (t). Für festen Ort (feste Zeit) ergibt sich eine harm. Fkt der Zeit (des Orts) ...

a) **Fester Ort** $x \Rightarrow$ Auslenkung ist periodische Funktion der **Zeit** (mit der Kreisfreq. ω):



$$y \sim e^{j(k \cdot x - k \cdot c \cdot t)} \sim e^{-j(k \cdot c \cdot t)} = e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

$\omega = k \cdot c$ [Gl.4.2.3.]

Zwischen Periodendauer T und Kreisfreq. ω (bzw. Wellenzahl k und Phasengeschw. c)

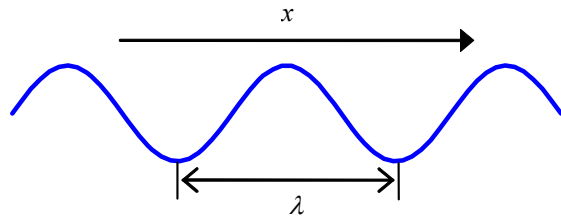
besteht der Zusammenhang : $\omega = \frac{2\pi}{T} = k \cdot c$

b) **Feste Zeit** $t \Rightarrow$ Auslenkung ist periodische Funktion des **Orts**:

$$y \sim e^{j(k \cdot x - \omega t)} \sim e^{j \cdot k \cdot x}$$

2π -periodisch, d.h. gleicher Funktionswert, wenn Argument um 2π verändert wird:

$$\begin{aligned} y(kx) &= y(kx + 2\pi) \\ &= y(kx + 4\pi) \\ &= y(kx + 6\pi) \\ &= \dots \end{aligned}$$



Dies entspricht im Ort x der **Wellenlänge** λ : Periode im Raum: $k \cdot \lambda = 2\pi$ bzw.

Kreiswellenzahl : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [Gl.4.2.4.]

Harmonische Welle in Raum und Zeit ...

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)} \\ &= \hat{y} \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)} \end{aligned} \quad \text{[Gl.4.2.5.]}$$

Ergänzung:

Der Ansatz $y(x, t) = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)}$ beschreibt nur harmonische Wellen, die sich (1-dimensional!) in $+x$ -Richtung ausbreiten. Die Verallgemeinerung zu beliebigen Richtungen erhält man, wenn man den Vektor \vec{k} einführt. Die Richtung von \vec{k} ist die Ausbreitungsrichtung der Welle, für den Betrag gilt $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Die 3-dimensionale ebene harmonische Welle wird dann

beschrieben durch $e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ (dabei ist \vec{r} der Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$).

Analogie zwischen λ und T bzw. zwischen k und ω bei harmonischen Wellen:

Ort	Zeit
Wellenlänge λ [m]	Periodendauer T [s]
Wellenzahl ¹ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [1/m]	Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [1/s]

$$\omega = k \cdot c$$

$$2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c$$

$$c = \lambda \cdot f$$

Phasengeschwindigkeit =

„Länge“ einer Schwingung $\cdot \frac{\text{Anz. Schwingungen}}{\text{Zeit}}$ [Gl.4.2.6.]

➤ Ausbreitungsmedium:

Bei der Wellenausbreitung spielen immer zwei Energieformen eine Rolle (mech. Welle: kin. u. pot. Energie). Dementsprechend sind auch zur Charakterisierung des Ausbreitungsmediums (Seil, Luft, Wasser, Kabel, ...) 2 „Kennzahlen“ erforderlich (Absorption/ Dämpfung der Welle werden vorerst nicht betrachtet!):

- ① Phasengeschwindigkeit c und ② Wellenwiderstand Z

Eine Welle kann sich im Medium nur ungestört ausbreiten, wenn c u. Z konstant sind!

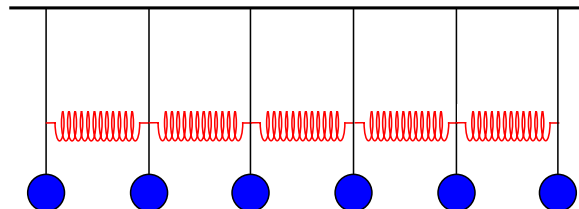
① Phasengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit „ c “ hängt natürlich von den Eigenschaften des „Ausbreitungsmediums“ ab...

Bsp.: Pendelkette

c kann z.B. abhängen von ...

Federn, Masse, Länge...



Im Kap. 4.2.1.1 etc. wird an einigen Beispielen gezeigt, wie „ c “ (aus der „Dynamik“ des spez. Systems) berechnet wird. Die Vorgehensweise ist dabei ähnlich wie bei der Berechnung der Schwingungsfrequenz eines Oszillators:

¹ Manchmal wird auch die Größe $1/\lambda$ (ohne 2π !) als Wellenzahl bezeichnet.

Dies entspricht dann der („gewöhnlichen“) Frequenz $f = 1/T$ (anstatt der Kreisfrequenz)

Berechnung der Schwingungsfrequenz ω_0	Berechnung der Phasengeschwindigkeit c
1. Betrachtung der dynamischen Eigenschaften des Systems (Mechanik $\Rightarrow F = m a!$) 2. Aufstellen der Differentialgleichung (diese beschreibt die <u>zeitliche</u> Entwicklung des Systems) 3. Umformen der DGl. auf Normalform 4. Ablesen der Kreisfrequenz ω_0	1. Betrachtung der dynamischen Eigenschaften des Systems (Mechanik $\Rightarrow F = m a!$) 2. Aufstellen der Differentialgleichung (diese beschreibt, wie sich eine „Störung“ in <u>Zeit und Raum</u> ausbreitet) 3. Umformen der DGl. auf Normalform 4. Ablesen der Geschwindigkeit c

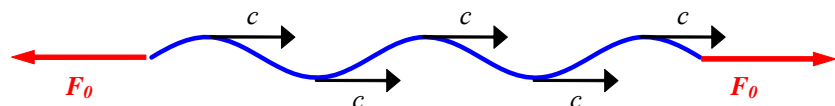
② Wellenwiderstand

Je nach „Härte“ reagiert das Medium auf die Auslenkung („Störung“) mit unterschiedlichem Widerstand. Betrachten wir z.B. den Erreger einer Sinuswelle. Der Erreger schwingt und wirkt mit der Kraft $F_E(t) = \hat{F} \cdot \cos(\omega_E t)$ auf das Medium. Aus der Kraft-Amplitude \hat{F} und der „Härte“ des Mediums ergibt sich die maximale Auslenkung \hat{y} . Mit der Erregerfrequenz ω_E erhält man daraus die Geschwindigkeits-Amplitude \hat{v} . Als **Wellenwiderstand** des Mediums bezeichnet man dann das Verhältnis $Z = \hat{F} / \hat{v}$. Der Wellenwiderstand ist also ein Maß dafür, welche Kraft („Ursache“) erforderlich ist, um eine gewisse Geschwindigkeit („Wirkung“) zu erzielen.

4.2.1.1 Wellenausbreitung auf einem Seil, einer Saite

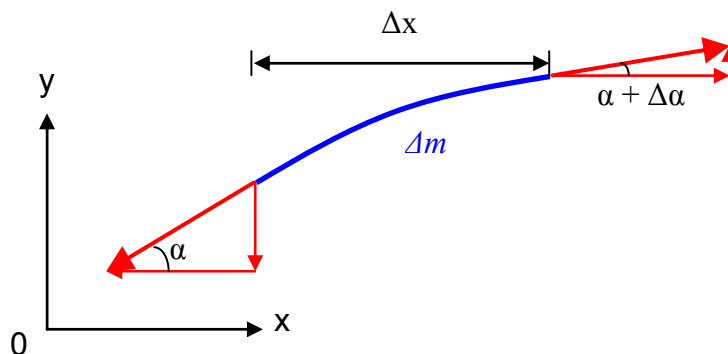
Seil ist mit Kraft F_0 gespannt

Querschnittsfläche A
 Dichte ρ
 Masse pro Länge
 $\frac{dm}{dx} = \rho \cdot A$
 [Gl.4.2.7.]



- betrachte ein „kurzes“ (infinitesimales) Stück Δx des Seils:

Masse $\Delta m = \rho A \cdot \Delta x$
 [Gl.4.2.8.]



- Seil ist gekrümmt \Rightarrow Kräfte auf Δm links / rechts sind verschieden, spez. in y -Richtung!
- Die resultierende Kraft
 $\Delta F_y = F_0 \cdot (\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin(\alpha))$

beschleunigt die Masse Δm in y -Richtung:

- Wir betrachten nur kleine Auslenkungen. Dann ist ...

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \tan(\alpha) \quad \tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \alpha$$

Die Kraft ergibt sich dann einfach zu $\Delta F_y = F_0 \cdot \Delta \alpha$

- Es kommt also auf die Veränderung $\Delta \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \Delta x$ des Neigungswinkels α (auf dem betrachteten Seilstück Δx) an.

Wg. $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ kann diese durch die 2. Ableitung berechnet werden: $\Delta \alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$

- Somit: Kraft ΔF_y auf Masse dm : $\Delta F_y = F_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$

- Newton II \Leftrightarrow Kraft = Masse * Beschleunigung, $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$\Delta F_y = \Delta m \cdot a_y \quad \Leftrightarrow \quad F_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x = (\rho \cdot A \cdot \Delta x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Die als „Hilfsgröße“ eingeführte Länge des Seilstücks Δx kürzt sich weg und wir erhalten die

$$\text{DGL. : } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho \cdot A}{F_0} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad [\text{Gl.4.2.9.}]$$

Allgemein wird eine (partielle) DGL. dieser Form als

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \text{const.} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{d'Alembertsche „WELLENGLEICHUNG“}$$

[Gl.4.2.10.]

bezeichnet. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen ...

- Veränderung der Auslenkung y mit der Zeit t und
- der Veränderung der Auslenkung y mit dem Ort x .

Die allg. Lösung dieser Wellengl. sind alle Funktionen der Form $y(x,t) = y(x - c \cdot t)$, bei denen sich ein Wellenzug mit der Geschwindigkeit c in x-Richtung ausbreitet. Wegen ...

$$\frac{\partial^2 y(x-ct)}{\partial x^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y(x-ct)}{\partial t^2} = \underbrace{c^2}_{\text{Kettenregel!!}} \cdot y''$$

wird $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} = y'' - y'' = 0$. Daraus folgt ...

- Eine beliebige Funktion $y(x,t) = y(x - c \cdot t)$ erfüllt die d'Alembertsche Wellengleichung und

- Die Konstante „const.“ in der d'Alembertschen Wellengleichung

hat die Bedeutung „1/Geschw.-Quadrat“ !

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

[Gl.4.2.11.]

- Speziell für eine Welle auf einem Seil erhält man somit $\frac{1}{c^2} = \frac{\rho \cdot A}{F_0}$ oder

$$c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho \cdot A}}$$

[Gl.4.2.12.]

Insbesondere sind natürlich auch die harmonischen Wellen

$y = \hat{y} \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c \cdot t)}$ (bzw. $y = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega \cdot t)}$) Lösungen der Wellen-DGL., wie man schnell nachrechnen kann ...

Ansatz: $y = \hat{y} \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c \cdot t)}$

Ableitungen: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 \cdot y(t)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \cdot y(t)$

Einsetzen in DGL. $[-k^2 \cdot y(t)] - \frac{1}{c^2} \cdot [-k^2 c^2 \cdot y(t)] = 0$

es folgt $\left(-k^2 + \frac{k^2 c^2}{c^2}\right) \cdot y(t) = 0$ ✓

⇒ Ansatz ist eine Lösung der DGL., qed!

Wellenwiderstand des Seils/der Saite :

- Durch Auf- und Abbewegung des Seilendes wird eine mech. Querwelle erzeugt
- Die harm. Welle sei $y(x, t) = \hat{y} \cdot \cos(kx - \omega t)$
- Sie wird durch eine harmonische Erregerkraft erzeugt (Seilspannung F_0) :

$$F_E(t) = -F_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = -F_0 \hat{y} k \cdot \sin(-\omega t)$$

$$= \hat{F} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \hat{F} = F_0 \hat{y} k$$

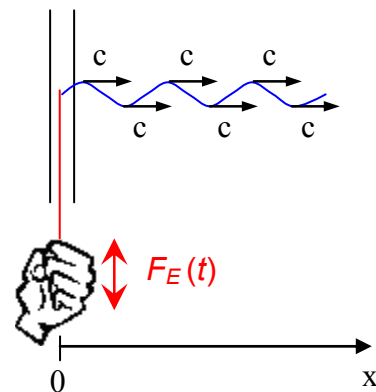
- Die Geschwindigkeit, mit der sich der Erreger (und der Anfang des Seils) bewegt, ist

$$v_E(t) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=0} = \hat{y} \omega \cdot \sin(-\omega t)$$

$$= -\hat{v}_E \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \hat{v}_E = \hat{y} \omega$$

- Der Wellenwiderstand Z ergibt sich aus dem Verhältnis von Kraftamplitude zu Geschwindigkeitsamplitude des Erregers („Ursache“ / „Wirkung“)...

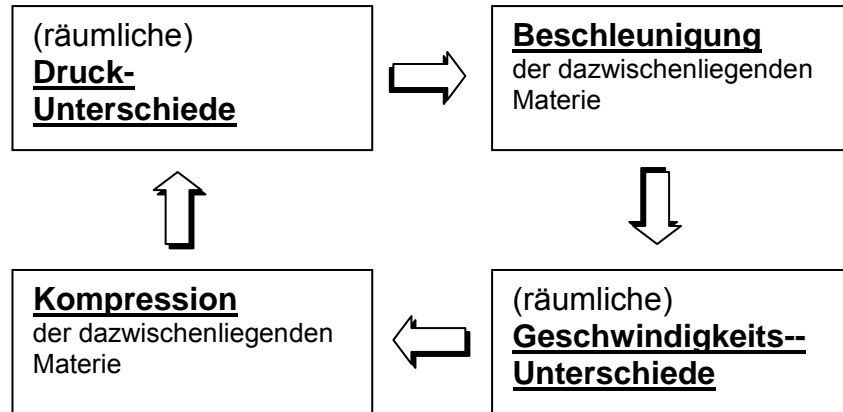
$$Z = \frac{\hat{F}_E}{\hat{v}_E} = \frac{F_0 \hat{y} k}{\hat{y} \omega}$$



Mit $c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho \cdot A}}$ oder $F_0 = c^2(\rho \cdot A)$, $\omega/k = c$ ergibt sich

$$Z = \frac{\hat{F}_E}{\hat{v}_E} = \frac{c^2(\rho A)}{c} \quad \boxed{Z = c(\rho A)} \quad [\text{Gl.4.2.13.}]$$

4.2.1.2 Schallwellen (Longitudinale Elastische Wellen) (Schall/Ultraschall in Luft, Gasen, Flüssigkeiten, Festkörpern ...)

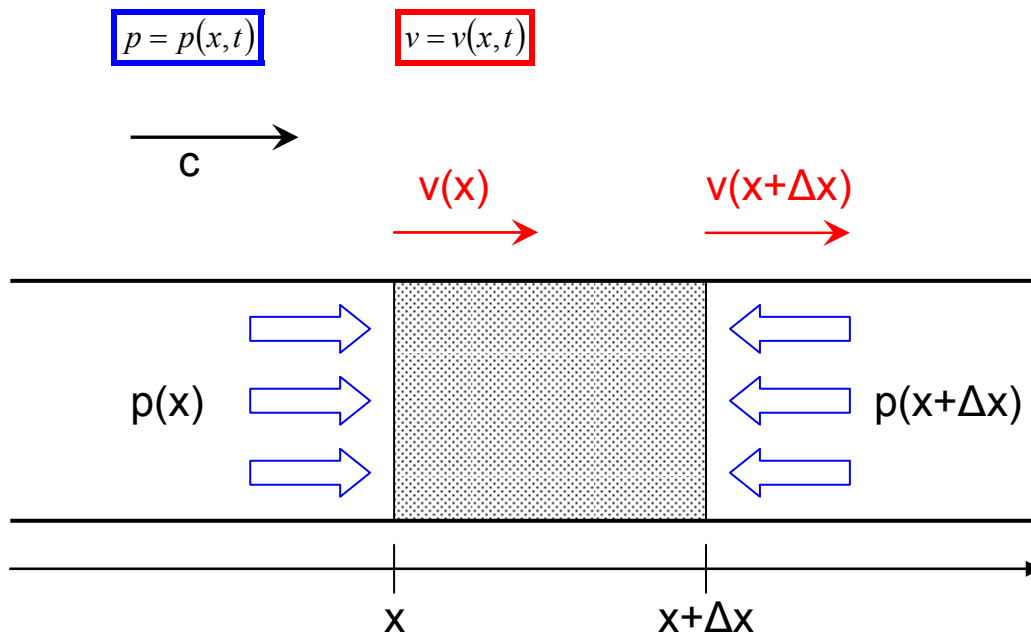


Betrachte „kleines Volumen ΔV “ und **EBENE** Schallwelle :

- weit weg von punktf. Erreger oder ...
- nahe bei großfl., ebenem Erreger oder ...
- in Rohr, Stab, ...

Ausbreitungsrichtung der Welle \Rightarrow x - Richtung

- **Druck** („Schallwechseldruck“) und **Geschwindigkeit** („Schallschnelle“) hängen von x und t ab:



① Druckunterschiede \Rightarrow Beschleunigung

Masse : $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \Delta x$

res. Kraft:

$$\begin{aligned} F_{res} &= A \cdot p(x) - A \cdot p(x + \Delta x) \\ &= A \cdot \{p(x) - p(x + \Delta x)\} \\ &\approx A \cdot \left\{ p(x) - \left(p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \right\} \\ &= -A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

Newton II :

$$F_{res} = m \cdot a$$

[Gl.4.2.14.]

$$-A \cdot \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{F_{res}} \Delta x = \underbrace{\rho \cdot A \cdot \Delta x}_{\Delta m} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_a$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad \textcircled{1}$$

[Gl.4.2.15.]

② Geschwindigkeitsunterschiede \Rightarrow Volumenänderung (Kompression/Expansion)

falls $v(x) \neq v(x + \Delta x) \rightarrow$ Volumen ändert sich : $\Delta V = \Delta V(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta V)}{dt} &= \frac{A \cdot \{v(x + \Delta x) dt - v(x) dt\}}{dt} \\ &= A \cdot \left\{ v(x) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x - v(x) \right\} \\ &= \underbrace{A \cdot \Delta x}_{=\Delta V} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

(relative) Vol.-Veränderung / Zeit: $\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$

Welche **Druckveränderung** ergibt sich daraus ? $\frac{d(\Delta V)}{dt} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} ?$

Kompressibles Medium:

Druck größer \Rightarrow Volumen kleiner

Maß für „Härte“ des Mediums:

Flüssigkeiten, Gase \rightarrow Kompressionsmodul K
(Festkörper : E -Modul)

Definition:

$$K = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

[Gl.4.2.16.]

Aus (*) erhält man damit ...

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d(\Delta V)}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{d(\Delta V)}{dp}}_{=-\frac{1}{K}}$$

$$\frac{-1}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial t} \quad \textcircled{2}$$

[Gl.4.2.17.]

(1) u. (2) sind zwei gekoppelte Dgl. für Druck $p = p(x, t)$ und Geschwindigkeit $v = v(x, t)$. Aus diesen Gleichungen läßt sich p (bzw. v) eliminieren, wenn eine Gl. nach x , die andere nach t differenziert wird ...

$$\textcircled{1} \Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \quad \textcircled{2} \Rightarrow - \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = K \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

↓

$$\text{Dgl. für } v(x, t): \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = K \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Umformen auf Normalform ...

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{K} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{wieder: d'Alembertsche Wellengl.})$$

[Gl.4.2.18.]

$$\text{Phasengeschwindigkeit: } \frac{\rho}{K} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

$$\text{Phasengeschw. einer elast. Längswelle in Medium mit Kompressionsmodul } K: c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

[Gl.4.2.19.]

Analog ...

$$\text{Dgl. für } p = p(x, t) : \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{K} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} !$$

Lösung der 2 Dgl. : z.B. ebene harmonische Wellen

$$v(x, t) = \hat{v} e^{jk(x-ct)}$$

$$p(x, t) = \hat{p} e^{jk(x-ct)} + p_0 \quad (p_0 = \text{statischer (Gas-) Druck!})$$

Zusammenhang **Druck**amplitude \Leftrightarrow **Schnelle**amplitude ?

$$\textcircled{1} \rightarrow - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

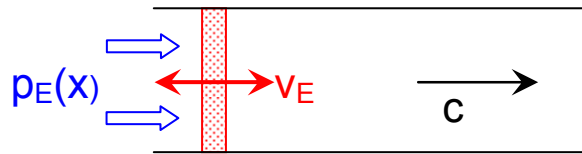
$$- jk \hat{p} e^{jk(x-ct)} = \rho (- jkc) \hat{v} e^{jk(x-ct)}$$

$$\hat{p} = (\rho \cdot c) \cdot \hat{v}$$

Der gleiche Zusammenhang gilt auch zwischen Druck und Geschwindigkeit des **Erregers** (der die Schallwelle erzeugt)

„Ursache“ : Druck , „Wirkung“ : Schnelle
(vergl. E-Technik : Spannung u. Strom !)

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{(\rho \cdot c)} \quad \left(I = \frac{U}{Z} \right) \quad [\text{Gl.4.2.20.}]$$



Der Wellenwiderstand (oder : Schallkennimpedanz) für eine ebene Schallwelle ergibt sich

$$\text{somit zu } Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho \cdot c, \quad [Z] = \frac{\text{N/m}^2}{\text{m/s}} = \text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

Wellenwiderstand, Schallkennimpedanz: $Z = \rho \cdot c$

[Gl.4.2.21.]

Beispiele / Übung ...

	ρ / (kg/m ³)	K / (Pa)	c / (m/s)	Z / (kg/m ² s)
Wasser (20°C)	998	2,19 · 10 ⁹
Muskel	1040	1568
Knochen	1700	3600
Stahl	7700	5050

Etwas **Thermodynamik** : Wie groß ist der Kompressionsmodul K beim „idealen **Gas**“ ?

Zusammenhang zwischen Druck/Volumen/Temp. : $\frac{pV}{T} = nR_m$ [Gl.4.2.22.]

($R_m = 8.31 \text{ J}/(\text{mol K})$ allg. Gaskonstante, n : Stoffmenge (mol))

Bei Schallschwingungen verlaufen Druckänderungen so schnell, daß kein Wärmeaustausch mit Umgebung stattfinden kann

⇒ „adiabatische Zustandsänderung“ : $pV^\kappa = \text{const.}$ oder: $p \cdot V(p)^\kappa = p_0 \cdot V_0^\kappa$
 κ : „Adiabatexponent“,
 Luft (u. andere 2-atomige Gase): $\kappa = 1.4$

$$V(p) = V_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\kappa}}$$

$$K = - \frac{1}{V \frac{dV}{dp}} \Big|_{p=p_0} = \dots = p_0 \cdot \kappa$$

Damit ergibt sich die Schallgeschwindigkeit in Gasen zu $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_0 \kappa}{\rho}}$. Bei Gasen hängt die Dichte ρ vom Druck p_0 ab. Beim idealen **Gas** ist (für $T = \text{const.}$) $\rho \propto p_0$

Mit der Zustandsgl. des idealen Gases $\frac{pV}{T} = nR_m$ ergibt sich $\frac{p}{T} = \underbrace{\frac{nM}{V}}_{=\rho} \cdot \frac{R_m}{M}$ (M : Molmasse)

Hier also $\frac{p_0}{\rho} = \frac{R_m}{M} T$ oder $c = \sqrt{\frac{R_m \cdot T \cdot \kappa}{M}}$ [Gl.4.2.23.]

Schallgeschwindigkeit **abhängig** von der Temperatur: $c \propto \sqrt{T}$,

unabhängig vom Druck !

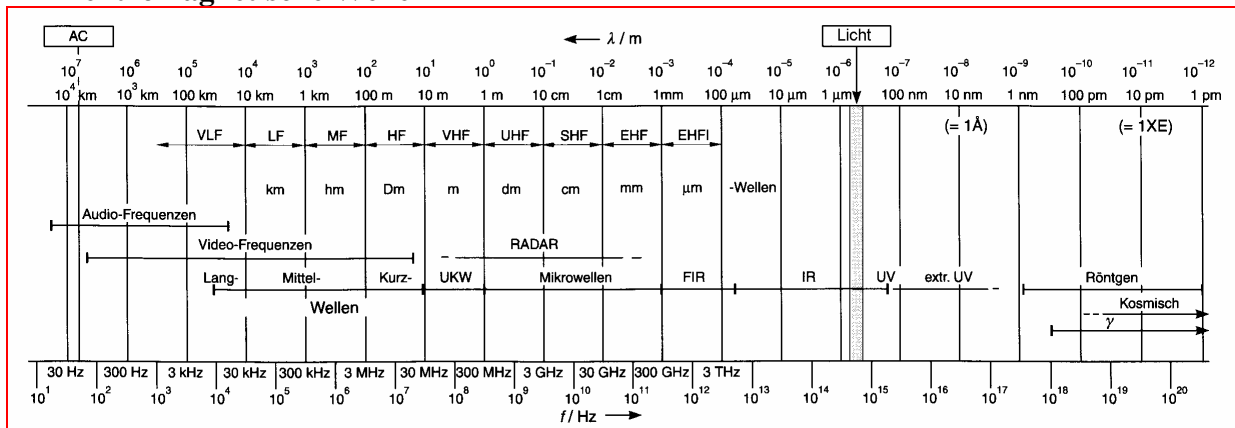
leichte Moleküle $\rightarrow c$ groß !

Bsp. Luft: $M = 29 \text{ g/mol}$, $T = 273 \text{ K}$, $c = 331 \text{ m/s}$, $Z = \rho \cdot c = 428 \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}$

$$T = 293 \text{ K}, c(293 \text{ K}) = c(273 \text{ K}) \cdot \sqrt{\frac{293}{273}} = \dots$$

4.2.1.3 Elektromagnetische Wellen

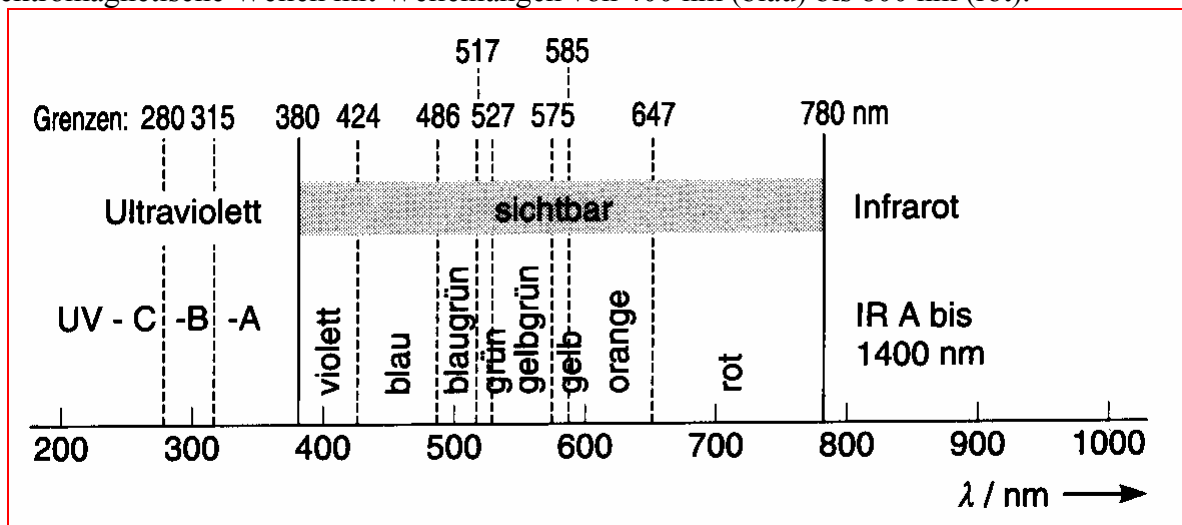
Elektromagnetische Wellen



Wellenlängen- bzw. Frequenzbereich elektromagnetischer Wellen

Sichtbares Licht :

elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen von 400 nm (blau) bis 800 nm (rot).



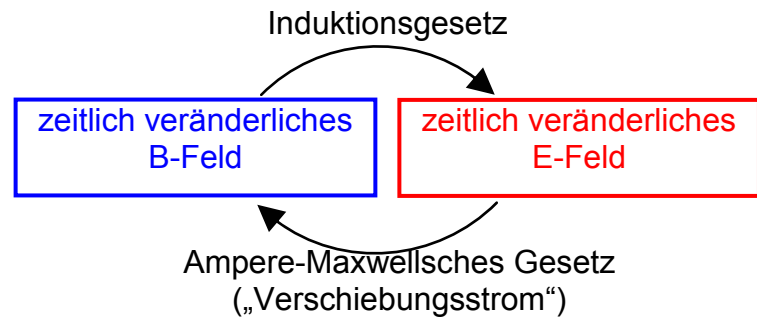
Das sichtbare Spektrum

Wie kann sich ein elektrisches / magnetisches Feld als Welle im Raum ausbreiten (ohne dass dort Ladungen oder Ströme sind, die die Felder erzeugen) ?

Elektrotechnik,

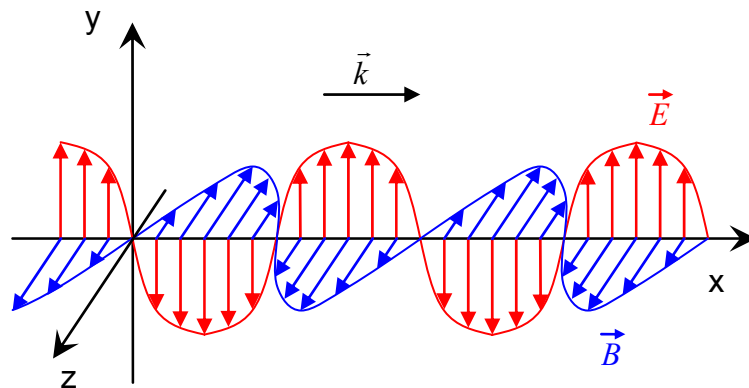
\vec{E} - u. \vec{B} - Felder im Vakuum:

- veränderl. magnetisches Feld erzeugt elektrisches Feld,
- veränderl. elektrisches Feld erzeugt magnetisches Feld
- Diese „Verkettung“ von \vec{E} - u. \vec{B} - Feld führt zur Wellenausbreitung! Sie wurde von J.C. Maxwell 1864 vorhergesagt



Ebene² elektromagnetische (em)-Welle im Vakuum

(Bsp.: Ausbreitungsrichtung: x)



\vec{k} : Ausbreitungsrichtung der Welle

Bei elektromagn. Welle ist immer ...

- $\vec{E} \perp \vec{k}$
- $\vec{B} \perp \vec{k}$
- $\vec{E} \perp \vec{B}$

- Die Vektoren der **elektr. Feldstärke** \vec{E} und **magn. Feldstärke** ($\rightarrow \vec{B}$) stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Vektor \vec{k}) („Querwelle“) und senkrecht zueinander!
- \vec{E} - u. \vec{B} -Felder schwingen in Phase!
- **Amplituden** der \vec{E} - u. \vec{B} -Felder sind einander proportional: $\hat{E} = \hat{B} \cdot c_0$ [Gl.4.2.24.]
- **Geschwindigkeit³**: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$ (= 30 cm / ns) [Gl.4.2.25.]

Diese Ergebnisse können aus den Feldgleichungen der elektr. und magn. Felder abgeleitet werden. Hier soll lediglich gezeigt werden, wie sich die Wellenl. für em-Wellen im Vakuum ergibt und wie daraus die Ausbreitungsgeschw. der em-Wellen berechnet wird (die Richtung von \vec{E} u. \vec{B} zueinander und zu \vec{k} wird hier vorausgesetzt ..., läßt sich aber ebenso zeigen).

² Es werden (wie bei den Schallwellen) – zunächst – nur **ebene** Wellen betrachtet, d.h. ebene Wellenfronten, die sich geradlinig ausbreiten. Wenn die Welle sich in x-Richtung ausbreitet, dann sind die E- u. B-Felder unabhängig von y und z. Streng genommen gibt es keine ebene Wellen... Man erhält aber in guter Näherung ebene Wellen durch einen großflächigen Erreger oder in großer Entfernung von einem Sender, so daß die Krümmung der Wellenfront vernachlässigt werden kann.

³ Zur Unterscheidung von der Lichtgeschwindigkeit in einem Medium mit Brechzahl n wird die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit hier mit c_0 bezeichnet. Es gilt: $c = c_0 / n$.

Maxwell-Gleichungen

E-Technik in 5 Minuten

4 Gleichungen beschreiben die räumliche und zeitliche Entwicklung des \vec{E} und \vec{B} Feldes:

	Integralform		Differentialform
1)	$\oint_o \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	Gaußsches Gesetz	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
2)	$\oint_o \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$	„keine magnetische Monopole“	$\text{div } \vec{B} = 0$
3)	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$	Induktionsgesetz	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4)	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \left(I + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{a} \right)$	Ampère-Maxwell-Gesetz	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Speziell gilt für em-Felder im „Vakuum“ ...

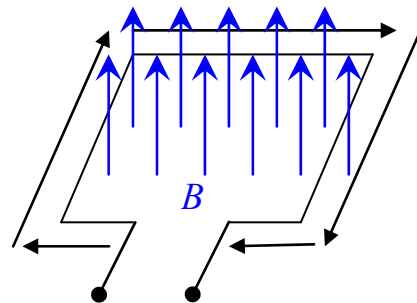
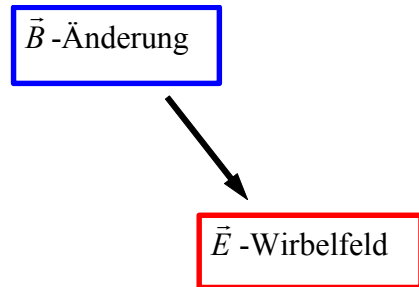
keine Ladungen	$Q = 0, \rho = 0$
keine Ströme	$I = 0, \vec{J} = \vec{0}$

Dann werden die 1. / 2. sowie die 3. / 4. Gleichung völlig symmetrisch ...

- E- u. B- Feld sind quellenfrei
- die zeitl. Veränderung eines Feldes erzeugt jeweils ein Wirbelfeld des anderen Feldes

Nr. 3: Induktionsgesetz : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$

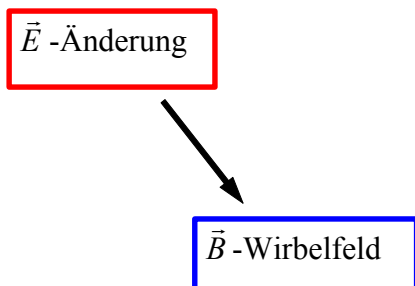
[Gl.4.2.26.]



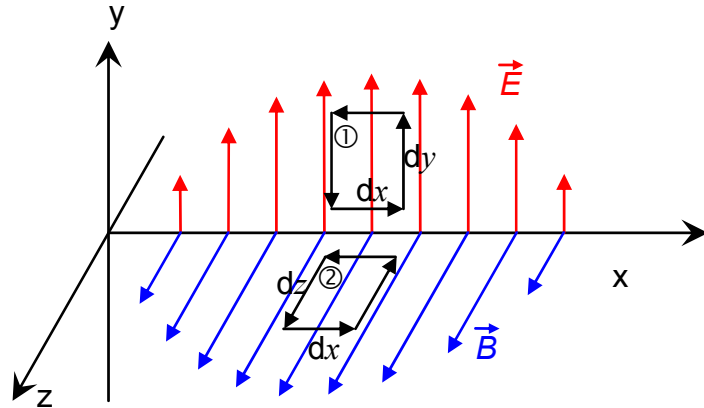
Bsp.: Induktionsspannung an Leiterschleife in veränderl. Magnetfeld $U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Nr. 4: Ampère-Maxwellsches Gesetz : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$

[Gl.4.2.27.]



Zur Herleitung der Wellengleichung setzen wir voraus, daß das E-Feld in der x-y-Ebene, das B-Feld in der x-z-Ebene liegt. Bei einer **ebenen** Welle (Ausbreitungsrichtung: x) sind die Felder außerdem unabhängig von y und z !



Wir betrachten 2 infinitesimale Rechtecke:

- Rechteck ① (vergl. Skizze) wird vom **B-Feld** „durchflutet“
⇒ **Induktionsgesetz (3.)** !
- Rechteck ② wird vom **E-Feld** „durchflutet“
⇒ **Ampère-Maxwellsches Gesetz (4.)** !

- **Induktionsgesetz (3.)** ⇒ ①

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

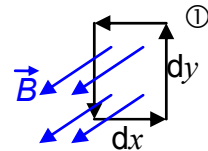
$$\underbrace{E(x+dx) \cdot dy}_{\text{rechts}} + \underbrace{0}_{\text{oben}} - \underbrace{E(x) \cdot dy}_{\text{links}} + \underbrace{0}_{\text{unten}} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \underbrace{(B \cdot dx \cdot dy)}_{\text{Fläche!}}$$

$$\underbrace{(E(x+dx) - E(x)) \cdot dy}_{\text{Fläche!}} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot (B \cdot dx \cdot dy)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot dx \cdot dy$$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}} \quad \text{③}$$

[Gl.4.2.28.]



- **Ampère-Maxwellsches Gesetz (4.)** ⇒ ②

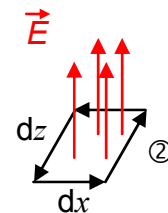
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$\underbrace{(B(x) - B(x+dx)) \cdot dz}_{\text{Fläche!}} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dx \cdot dz$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} \cdot dx \cdot dz = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dx \cdot dz$$

$$\boxed{-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t}} \quad \text{④}$$

[Gl.4.2.29.]



Aus ③ u. ④ kann E (oder B) eliminiert werden, indem man eine Gl. nach x, die andere nach t differenziert ...

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{③}$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{④}$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \cdot \partial x} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \cdot \partial t} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}_{=1/c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

[Gl.4.2.30.]

(wieder) die d'Alembertsche Wellengleichung!

Die Lösungen (vergl. vorhergehende Kapitel ...) der d'Alembertschen Wellengleichung kennen wir schon: Es sind

Wellen, die sich mit der **Phasengeschwindigkeit** $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$ (siehe Gl.4.2.25.) ausbreiten!

Speziell sind natürlich auch wieder harm. Funktionen Lsg. der DGl:

Ebene, harmonische elektromagnetische Welle

$$E(x,t) = \hat{E} \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c_0 \cdot t)} \quad B(x,t) = \hat{B} \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c_0 \cdot t)}$$

Welche Beziehung besteht zwischen den Amplituden (und Phasen) der E- und B-Felder ?

Mit Gl. ③ : $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ erhält man ...

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \hat{E} \cdot j \cdot k \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c_0 \cdot t)} = -\frac{\partial B}{\partial t} = +\hat{B} \cdot (j \cdot k \cdot c_0) \cdot e^{j \cdot k \cdot (x - c_0 \cdot t)}$$

⇒ $\hat{E} = \hat{B} \cdot c_0$ (Amplitude E) = $c \cdot$ (Amplitude B) , siehe Gl.4.2.24.
(da c_0 reell ist folgt daraus auch die Phasengleichheit von E u. B!)

Ergänzung:

Die d'Alembertsche Wellengleichung in der Form $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ beschreibt Wellen, die sich (eindimensional) in x-Richtung ausbreiten. Im 3-dim. Fall tritt an Stelle der 2. Abl. nach x die Summe der 2. Ableitungen nach x, y u. z :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{D'Alembertsche Wellengleichung, 3-dim. : } \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

(Für ebene Wellen, die sich in x-Richtung ausbreiten, hängt E nicht von y, z ab, die entspr. Ableitungen sind Null und man erhält wieder die 1-dim. Wellengleichung wie oben!)

Wellenwiderstand der em-Welle

Wie bei den anderen Wellentypen auch, kann man bei den elektromagnetischen Wellen eine Größe „Wellenwiderstand“ definieren, die das Verhältnis von zwei Amplituden beschreibt und neben der Wellengeschwindigkeit c eine für die Ausbreitung der Welle im betreffenden Medium wichtige Größe ist. Im Vakuum beschreibt nun die „Lichtgeschwindigkeit“ $c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s offensichtlich nicht nur die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen und magnetischen Felder, sondern auch das Verhältnis der Amplituden der elektrischen und magnetischen Komponente der elektromagnetischen Welle. Wenn man nun also den Wellenwiderstand des Vakuums als (Amplitude E) / (Amplitude B) definiert, dann erhält man eine Größe von der Dimension einer Geschwindigkeit (vergl. Tabelle), nämlich einfach gleich c_0 .

Zur Beschreibung von elektrischen und magnetischen Feldern gibt es aber jeweils zwei Größen, eine so genannte „Feldstärke“ und eine so genannte „Flussdichte“.

[Gl.4.2.31.]

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Feldstärke:	\vec{E} $[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	\vec{H} $[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Flussdichte:	$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ $[D] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$	$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$ $[B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}$

Für die Kraftwirkung auf elektrische Ladungen und Ströme werden die Felder E und B gebraucht. Im Vakuum ($\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$) genügen diese zwei Größen, denn sowohl beim elektrischen als auch beim magnetischen Feld unterscheidet sich dann die Flussdichte von der Feldstärke nur jeweils durch eine Naturkonstante (die elektrische bzw. magnetische Feldkonstante).

Bei der elektrischen und magnetischen Feldern **in Materie** muss man aber beim elektrischen Feld zwischen E und D , beim Magnetfeld zwischen H und B unterscheiden.

Man definiert nun den so genannten „Feldwellenwiderstand“ mit H und E :

Feldwellenwiderstand: $Z = \frac{\hat{E}}{\hat{H}}$ (mit der Einheit $[Z] = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}} = \Omega$!)

Im Vakuum (Index $_0$) ist nach Gl.4.2.24. : $\hat{E} = \hat{B} \cdot c_0$

Somit $\hat{E} = \mu_0 c_0 \cdot \hat{H}$ $Z_0 = \frac{\hat{E}}{\hat{H}} = \mu_0 c_0$ [Gl.4.2.32.]

oder (mit Gl.4.2.25.) : $Z_0 = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Als Zahlenwert ergibt sich der Wellenwiderstand des Vakuums zu

$$Z_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 40\pi \cdot 2,998 \Omega \approx 376,7 \Omega$$

In Materie (Index $_n$) ergibt sich Geschwindigkeit und Wellenwiderstand einer elektromagnetischen Welle mit den zu Gl.4.2.24. und Gl.4.2.25. analogen Beziehungen

• **Geschwindigkeit:** $c_n = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \cdot \epsilon_r \epsilon_0}}$ [Gl.4.2.33.]

• **Feldwellenwiderstand:** $Z_n = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$ [Gl.4.2.34.]

Bei den meisten Materialien (insbesondere bei denen, die für sichtbares Licht oder andere elektromagnetische Wellen durchlässig sind) ist $\mu_r \approx 1$. Damit gibt es nur noch eine einzige Materialkonstante (ϵ_r), aus der sich dann Wellengeschwindigkeit und Wellenwiderstand ergeben: $c_n = c_0/\sqrt{\epsilon_r}$ (oder $c_n \sim 1/\sqrt{\epsilon_r}$) und $Z_n = Z_0/\sqrt{\epsilon_r}$ (oder $Z_n \sim 1/\sqrt{\epsilon_r}$). Andererseits ist die Brechzahl n eines Mediums definiert durch die Beziehung $c_n = c_0/n$. Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen den „elektromagnetischen“ und „optischen“ Materialkonstanten:

$$\text{a) } n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (\text{„Maxwell-Relation“}) \quad \text{b) } Z_n = Z_0/n \quad [\text{Gl.4.2.35.}]$$

Häufig benötigt man nur das Verhältnis der Wellenwiderstände von zwei Materialien. Dieses lässt sich durch das umgekehrte Verhältnis der Brechzahlen ausdrücken:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad [\text{Gl.4.2.36.}]$$

4.2.1.4 Wellenausbreitung in Kabeln (Koaxialkabel, Twisted-Pair-Kabel etc.)

Ein weiteres Beispiel für Wellen ist die Ausbreitung von elektrischen Signalen auf Kabeln. Um ein einfaches Modell zu erhalten, machen wir folgende Annahmen ...

1. verlustfreies Kabel
2. kein Ohmscher Widerstand !
3. Kabelkapazität und Induktivität verlustfrei, frequenzunabhängig

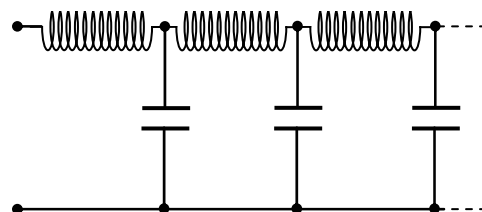
- An Kabel liegt Spannung $U = U(x, t)$, fließt Strom $I = I(x, t)$
- Suche Dgl., die Ausbreitung eines Signals auf Kabel beschreibt, d.h. mit der bei geg. Randbed. $U = U(x, t)$ und $I = I(x, t)$ berechnet werden können

Def.: Kabelkapazität und Induktivität pro Längeneinheit

$$C' = \frac{dC}{dx} = \frac{C}{l} \quad (\text{ges. Kap. } C, \text{ ges. Ind. } L, \text{ Länge des Kabels } l) \quad [\text{Gl.4.2.37.}]$$

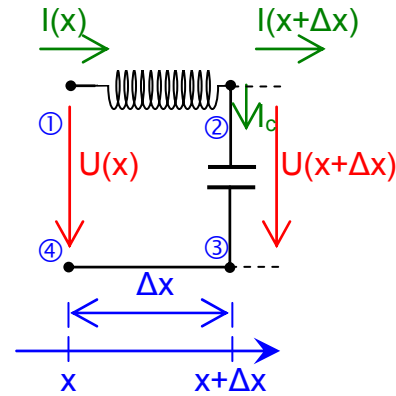
$$L' = \frac{dL}{dx} = \frac{L}{l}$$

Ersatzschaltbild des Kabels:



Betrachte kurzes Kabelstück

- Länge Δx
- Kapazität $\Delta C = C' \cdot \Delta x$
- Induktivität $\Delta L = L' \cdot \Delta x$



Masche ① → ② → ③ → ④: $(L' \cdot \Delta x) \frac{\partial I}{\partial t} + U(x + \Delta x) + 0 - U(x) = 0$

Für hinreichend kleine Δx gilt

$$U(x + \Delta x) \approx U(x) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x$$

$$(L' \cdot \Delta x) \frac{\partial I}{\partial t} + \left(U(x) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right) - U(x) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L' \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1)$$

[Gl.4.2.38.]

Knoten ② :

$$I(x) - I(x + \Delta x) - (C' \cdot \Delta x) \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Für hinreichend kleine Δx gilt

$$I(x + \Delta x) \approx I(x) + \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x$$

$$I(x) - \left(I(x) + \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x \right) - (C' \cdot \Delta x) \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C' \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2)$$

[Gl.4.2.39.]

(1) u. (2) sind zwei gek. Dgl. für Spannung $U = U(x, t)$ und Strom $I = I(x, t)$

Aus den Gl. läßt sich U (bzw. I) eliminieren, wenn eine Gl. nach x , die andere nach t differenziert wird ...

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -L' \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}, (2) \Rightarrow -\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - L' C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

[Gl.4.2.40.]

Durch Vergleich mit der allg. Wellengl. (d'Alembert-Gl.) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ finden wir die

Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals auf dem Kabel: $c = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$ [Gl.4.2.41.]

Beispiel: Für ein Koax-Kabel mit Innen-/Außenradius r_i / r_a gilt :

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}, L' = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$c_{koax} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{1}{c_0}$$

$$c_{koax} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} (< c_0 !)$$

Bei einem Kabel mit „typischem“ Dielektrikum ($\mu_r = 1, \epsilon_r \approx 2.5$) beträgt die Signalgeschw.

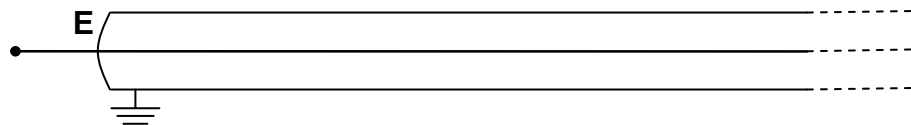
also $c_{koax} = \frac{1}{\sqrt{2.5}} c_0$, d.h. „nur“ ca. 60 % der Vakuumlichtgeschwindigkeit!

Bei unserem Modell-Kabel hatten wir den ohmschen Widerstand des Kabels vernachlässigt! Trotzdem hat dieses Kabel aber einen ...

Wellenwiderstand

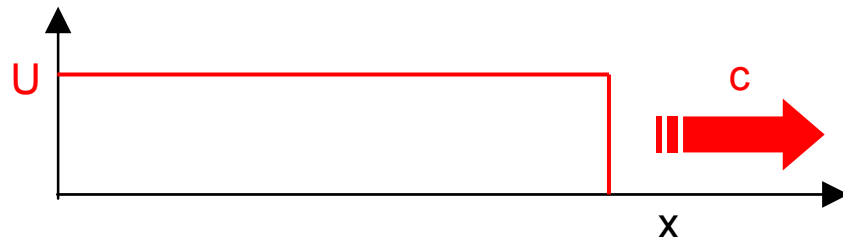
Ein Beispiel soll veranschaulichen, was der „Wellenwiderstand“ eines Kabels bedeutet ...

- An den Eingang E eines (sehr langen)



Koaxkabels wird zur Zeit $t = 0$ eine Spannung U_0 angelegt

- Die „Front“ breitet sich mit Geschw. c auf dem Kabel aus



- Ein immer größerer Teil der Kabel-Kapazität wird aufgeladen

⇒ es fließt ein Ladestrom !

- Solange sich die Wellenfront ungestört weiterbewegt verhält sich das Kabel wie ein (ohmscher) Widerstand !

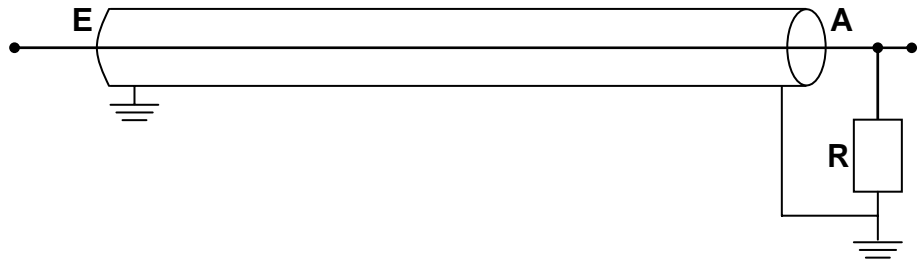
$$\text{Ladung auf Kabel: } Q(t) = U \cdot (C' \cdot ct)$$

$$\text{Strom: } I = \dot{Q} = U \cdot (C' \cdot c)$$

$$\text{Wellenwiderstand: } Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{C' \cdot c} = \frac{\sqrt{L'C'}}{C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad [\text{Gl.4.2.42.}]$$

- „Typische“ Koaxkabel (z.B. „gelbes“ oder „schwarzes“ Ethernet-Kabel) haben einen Wellenwiderstand von $Z = 50 \Omega$.
- Der Wellenwiderstand ist charakteristisch für einen Kabeltyp – er hat nichts mit dem (ohmschen) Durchgangswiderstand des Kabels und nichts mit der Kabellänge zu tun!
- ein 50Ω -Kabel hat einen Wellenwiderstand von 50Ω - egal ob es 1 m oder 1 km lang ist!

- Wird das Kabel am Ausgang A durch einen Widerstand $R = Z$ **abgeschlossen** so wird ein! Puls dort **ohne Reflexion** „absorbiert“. Das (endlich lange) Kabel verhält sich dann genau so, als ob es unendlich lange wäre
- Wird das Kabel durch einen Widerstand $R \neq Z$ abgeschlossen, offen gelassen ($R = \infty$) oder kurzgeschlossen ($R = 0$) so „merken“ wir dieses am Eingang E erst nach der doppelten Kabellaufzeit!
Ein Puls wird am (nicht mit $R=Z$ abgeschlossenen) Ende reflektiert und erscheint nach der doppelten Kabellaufzeit wieder am Eingang! Vorzeichen und Amplitude des refl. Pulses hängen von R ab!



4.2.2 Energietransport und Absorption

Bei Schwingungen/Wellen „pendelt“ Energie zwischen versch. Formen hin und her, z.B. ...

a) Elast. Querwelle , Saite/Seil

Harmonischer Oszillator:

pot. Energie

↔

kin. Energie

Maximum der Energie:

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot \hat{y}^2$$

$$\frac{1}{2} m \cdot \hat{v}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\omega \cdot \hat{y})^2$$

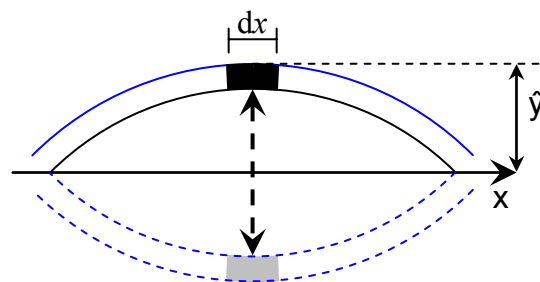
$$= \frac{1}{2} m \cdot \frac{c}{m} \cdot \hat{y}^2$$

$$E_{pot_{max}} = E_{kin_{max}} = E_{ges}$$

⇒ Energie eines kurzen Stücks (Länge dx , Masse dm) der schwingenden Saite:

$$dE = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\rho A \cdot dx}_{\text{Volumen } dV} \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$



Das Volumen des betrachteten Stücks ist $dV = A \cdot dx$, somit die **Energiedichte** w (Energie / Volumen)

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2 \quad [\text{Gl.4.2.43.}]$$

$$w \sim (\text{Amplitude})^2 !$$

Die Energie wird mit der Geschwindigkeit c transportiert. Damit kommt an einer best. Grenzfläche pro Zeiteinh. und pro Fläche ein von w und c abhängiger Energiebetrag an.

Die $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$ wird als Intensität I (spez. bei em-Wellen oft auch S) der Welle bezeichnet:

Intensität:
$$I = \frac{1}{A} \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{\underbrace{A \cdot dx}_{dV}} \cdot \frac{dx}{dt} = w \cdot c \quad (= \text{E.-Dichte } w * \text{ Geschw. } c)$$
 [Gl.4.2.44.]

$$[I] = \text{J}/(\text{s m}^2) = \text{W}/\text{m}^2$$

Spez für die elast. Querwelle auf Seil gilt also

$$I = \frac{1}{2} \cdot \rho c \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$$
 [Gl.4.2.45.]

Mit der Geschw.-Amplitude $\hat{v} = \omega \hat{y}$ und dem Wellenwiderstand $Z = \rho c A$ ergibt sich

$$I = \frac{1}{2} \cdot (Z/A) \cdot \hat{v}^2$$
 [Gl.4.2.46.]

Alternativ läßt sich die Intensität durch die „Kraftamplitude“ $\hat{F} = F_0 k \cdot \hat{y}$ (vergl. 4.2.1.1) ausdrücken. Mit $\hat{F} = Z \cdot \hat{v}$ erhält man ...

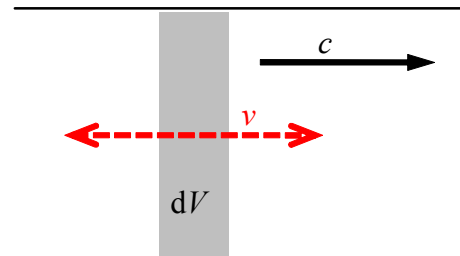
$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z \cdot \hat{v}^2}{A} \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{F} \cdot \hat{v}}{A} \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{F}^2}{Z \cdot A}$$
 [Gl.4.2.47.]

Der Energiefluß pro Fläche ist also je nachdem, ob man die Geschwindigkeits- oder die Kraftamplitude verwendet, proportional oder umgekehrt proportional zum Wellenwiderstand Z

(vergl. E-Technik, Leistung $P = I^2 \cdot R$, $P = UI$ bzw. $P = U^2 / R$)

b) Elast. Längswelle, Schall/Ultraschall

Ein Vol.-Element dV , das durch eine Schallwelle die Maximalgeschwindigkeit \hat{v} (Amplitude der Schallschnelle) erreicht, erhält dadurch die max. kin. Energie $dE = \frac{1}{2} \cdot d m \cdot \hat{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho dV \cdot \hat{v}^2$. Damit ergibt sich für eine Schallwelle ...



Energiedichte : $w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \hat{v}^2$ [Gl.4.2.48.]

Intensität (Schallstärke): $I = w \cdot c$ [Gl.4.2.49.]

$$I = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(\rho c)}_{=Z} \cdot \hat{v}^2$$
 [Gl.4.2.50.]

$$I = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot \hat{v}^2$$

Mit $\hat{p} = Z \cdot \hat{v}$ (vergl. 4.2.1.2) kann die Schallintensität aber auch durch die Amplitude des Schallwechseldrucks ausgedrückt werden:

$$I = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot \hat{v}^2 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \hat{p} \cdot \hat{v} \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{p}^2}{Z}$$
 [Gl.4.2.51.]

(vergl. dazu: Welle auf Seil, → a)

Bsp. 1:

Ein Ultraschallgerät erzeugt bei $f = 2$ MHz eine Schallintensität von $I = 10$ W/cm². Mit $c = 1500$ m/s und $\rho = 10^3$ kg/m³ ergibt sich :

Wellenlänge	$\lambda = c/f = 0.75 \text{ mm}$
Schallschnelleamplitude	$\hat{v} = \sqrt{2I/(\rho c)} = 0.37 \text{ m/s}$
Schallwechseldruckamplitude	$\hat{p} = \dots\dots\dots$

Aus der Schallschnelleamplitude kann dann die max. Elongation (Auslenkung) und Beschleunigung berechnet werden (wie erhält man aus der Geschw. die Beschleunigung, wie die Auslenkung ?)!

Bsp. 2:

Die kleinste, vom menschlichen Ohr wahrnehmbare Intensität ist etwa $I_{min} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Die zugehörigen Amplituden der Schallschnelle und des Schallwechseldrucks ergeben sich daraus zu

.....

Anmerkungen:

1. Häufig werden anstelle der Amplituden (Maximalwerte) die Effektivwerte angegeben. Wie bei den entsprechenden Wechselstromgrößen gibt es auch hier den Zusammenhang (für

harmonische Wellen) : $p_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{p}$ bzw. $v_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{v}$.

2. Die Schallintensität in Luft wird oft mit Hilfe eines logarithmischen Maßes als

„Schallintensitäts-Pegel β “ in „Dezibel“ (dB) angegeben. Es ist $\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ dB ;

dabei ist $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ die Intensität an der Hörschwelle.

Durch Bewertung mit der frequenzabhängigen Empfindlichkeit des menschlichen Ohres erhält man daraus die „Lautstärke“ in „Phon“. Bei 1000 Hz entspricht 1 dB gerade 1 Phon.

In der Praxis werden vereinfachte, normierte Bewertungskurven (A-, C-Bewertung) verwendet und die bewerteten Schallpegel als „dB (A)“ bzw. „dB (C)“ angegeben.

Absorption u. Dämpfung der (Schall-) Welle

Am Beispiel der Schallwelle soll die Schwächung von Wellen beschrieben werden. Durch die Bewegung der Moleküle treten zusätzlich Reibungskräfte auf (viskose Reibung). Dadurch wird nach und nach die von der Welle transportierte Energie in Wärme umgesetzt. Bereits beim ged. harm. Oszillator ergab sich (bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung) eine Amplitudenabnahme gemäß einer exp-Funktion : $\sim \exp(-\delta t)$.

Eine Welle dringt mit der Geschw. c in ein Medium ein, $x = c t$. Damit nimmt die Amplitude auch mit x exponentiell ab:

$$\hat{v}(x) = \hat{v}_0 \cdot e^{-\alpha x}, \quad \hat{p}(x) = \hat{p}_0 \cdot e^{-\alpha x}$$

Der „Abklingkoeffizient“ α hängt vom Material und von der Frequenz ab.

Da die Schallintensität quadratisch von den Amplituden abhängt, gilt für sie ebenfalls ein exp-Schwächungsgesetz, allerdings mit dem doppelten Koeffizienten:

$$I(x) = I_0 \cdot (e^{-\alpha x})^2 = I_0 \cdot e^{-2\alpha x}$$

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

Mit dem Schwächungskoeffizienten μ wird neben der eigentlichen

- (Schall-) **Absorption** (durch Reibung) auch die
- **Streuung**

berücksichtigt, die der der „Schallstrahl“ in eine andere Richtung abgelenkt wird, so daß es in der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung ebenfalls zu einer Intensitätsabnahme kommt.

Aus dem exp-Gesetz ergibt sich, daß bei gleicher Schichtdicke Δx die relative Intensitätsabnahme immer gleich ist

$$dI = -\mu I(x) dx$$

oder
$$\frac{dI}{I} = -\mu dx \quad \text{bzw. (für kleine } \Delta x) : \frac{\Delta I}{I} = -\mu \Delta x$$

Die Schichtdicke, bei der die Intensität auf die Hälfte abgeklungen ist, heißt

Halbwertsdicke h . Aus $I(h) = I_0 \cdot e^{-\mu h} = \frac{1}{2} I_0$ ergibt sich $h = \frac{\ln 2}{\mu}$. [Gl.4.2.52.]

Nach $2 h$ ist die Intensität auf $1/4 I_0$, nach $3 h$ auf $1/8 I_0$ etc. gesunken.

- Bsp.:
- Fettgewebe, bei $f = 0.9$ MHz ist $h = 7.7$ cm, $\mu = 0.09$ 1/cm.
 - Knochen, $f = 2.5$ MHz, $h = 0.1$ cm, $\mu = \dots$
 - In Luft ist die Schallabsorption relativ gering (μ hängt außer von der Frequenz auch z.B. von der Luftfeuchtigkeit ab), bei 1000 Hz ist $h \approx 400$ m.

Der Schwächungskoeffizient μ (und demzufolge auch die Halbwertsdicke h) sind meist stark frequenzabhängig. In Körpergewebe nimmt μ für Ultraschall zwischen 0.2 MHz und 100 MHz annähernd linear mit der Frequenz zu: $\mu \sim f$. Dadurch bewirkt die Schallabsorption eine starke Tiefpaßfilterung; Pulsformen von Ultraschallpulsen werden durch Absorption stark verändert!

c) Energietransport der elektromagn. Welle

Energiedichte des elektrischen / magnetischen Feldes (*hier: im Vakuum, $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$!*):

Idealer Plattenkondensator (homogenes elektr. Feld)	Lange Zylinderspule (homogenes magn. Feld)
Elektr. Feld $ \vec{E} = \frac{U}{d}$	Magn. Feld $ \vec{B} = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$
Kapazität: $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ (Fläche A , Abstand d)	Induktivität: $L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$ (Fläche A , Länge ℓ , Windungszahl N)
in aufgeladenem Kondensator gespeicherte Energie: $\frac{1}{2} CU^2$	in stromdurchflossener Spule gespeicherte Energie: $\frac{1}{2} LI^2$
Volumen: $V = Ad$	Volumen: $V = A\ell$
Energiedichte $w = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{AU^2}{dAd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} ^2$	Energiedichte $w = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{A\ell} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{AN^2 I^2}{\ell A\ell} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} ^2$
mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$	mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

Die Energiedichte eines komb. elektr. und magn. Feldes ergibt sich dann zu

$$w = \frac{1}{2} \cdot (E \cdot D + H \cdot B) \quad \text{[Gl.4.2.53.]}$$

elektr.-
magn.
Energiedichte

Bei einer **elektromagnetischen Welle** sind E- und B-Feld nicht unabhängig, es gilt der Zusammenhang $E = B \cdot c$ (\rightarrow 4.2.1.3). Damit läßt sich der „elektrische“ Anteil der Energiedichte berechnen

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot D = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \overset{c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}{c^2} \cdot B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{B \cdot B}{\mu_0}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot E \cdot D = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B}$$

[Gl.4.2.54.]

elektrische Energiedichte = magnetische Energiedichte !

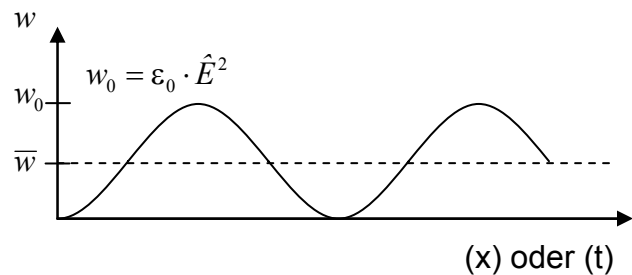
☞ **Elektrisches** und **magnetisches** Feld tragen jeweils 50 % zur Energiedichte der elektromagnetischen Welle bei!

Die gesamte Energiedichte ergibt sich dann zu

$$w = \frac{1}{2} \cdot (E \cdot D + H \cdot B) = \frac{2}{2} \cdot E \cdot D = E \cdot D \quad \text{bzw. } w = \epsilon_0 \cdot E^2 (= \mu_0 \cdot H^2) \quad [\text{Gl.4.2.55.}]$$

Eine **harmonische** elektromagnetische Welle mit der **Amplitude** \hat{E} des elektr. Feldes hat als Funktion von x , t die Feldstärke $E = \hat{E} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ und die Energiedichte

$$w = \epsilon_0 \cdot \hat{E}^2 \cdot \cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t)$$



Die Energiedichte schwankt also räumlich (und zeitlich) zwischen 0 und einem Maximalwert. Der Mittelwert ist gerade der halbe Maximalwert:

mittlere Energiedichte der em-Welle: $\bar{w} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \hat{E}^2$

Daraus ergibt sich die mittlere Intensität⁴: $\bar{S} = \bar{w} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \cdot \hat{E}^2$

$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \hat{E}^2}$$

[Gl.4.2.56.]

⁴ Die Intensität elektromagn. Wellen wird oft mit S (statt I) bezeichnet. S ist gleichzeitig der Betrag des „Poynting-Vektors“ $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Die Richtung von \vec{S} ist die der Wellenausbreitung: $\vec{S} \parallel \vec{k}$.

Absorption von em-Wellen

Tritt eine em-Welle in Materie (z.B. in Körpergewebe) ein, so kann sie in versch. Weise Energie abgeben ...

- | | |
|---|--|
| • Elektr. Feld \Rightarrow Kraft auf elektr. geladenen Teilchen (Ionen)
\Rightarrow Translationsbew. \Rightarrow Reibungseffekte \Rightarrow Wärme | Hochfrequenz ($> 10^5$ Hz)
\downarrow
Mikrowellen ($\approx 10^9$ Hz): |
| • Elektr. Feld \Rightarrow Drehmoment auf Moleküle mit perm. Dipolmomente (z.B. Wasser!)
\Rightarrow Rotationsbew. \Rightarrow Reibungseffekte \Rightarrow Wärme | (bei Wasser z.B. bei ca. 10^{10} Hz) |
| • Anregung von Molekülschwingungen, Wechselwirkung der Lichtquanten (Photonen) mit Atomen, Molekülen, Elektronen | Infrarot, sichtb. Licht, UV
($\approx 10^{12} \dots 10^{15}$ Hz)

... Röntgenstrahlung |

Es gilt (wie beim Schall) das exp-Schwächungsgesetz (das spez. in der Optik auch „Lambertsches Extinktionsgesetz“ genannt wird):

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad , \mu : \text{Schwächungskoeffizient}$$

μ und die Halbwertsdicke $h = \frac{\ln 2}{\mu}$ hängen vom Material und von der Frequenz ab.

Beispiele:

Muskelgewebe	$f = 1$ GHz	$h \approx 1$ cm
Wasser	$f = 3.89 \cdot 10^{14}$ Hz (rotes Licht, $\lambda = 770$ nm)	$h \approx 0.3$ m
Gold	$f = 5.49 \cdot 10^{14}$ Hz ($\lambda = 546$ nm)	$h \approx 8$ nm

4.2.3 Reflexion von Wellen

Was passiert, wenn eine Welle an das Ende des Mediums bzw. an eine Grenzfläche (Medium 1 \leftrightarrow Medium 2) kommt?

Bei solchen Problemen muß i.allg. zweierlei beachtet werden:

- Energieerhaltung
- Stetigkeit

Wir betrachten zunächst das „Ende“ des Mediums, dann den allg. Fall des Übergangs zwischen zwei Medien.

4.2.3.1 Reflexion am losen/festen Ende

Die Welle transportiert Energie. Da diese am Ende des Mediums nicht verschwinden kann, muß die Welle reflektiert werden, wobei die Intensität (Energieflußdichte) der refl. Welle I_r gleich der der einlaufenden Welle I_e ist (Dämpfung wird hier vernachlässigt):

$$I_e = I_r \quad (100\% \text{ Reflexion})$$

Da die Intensität quadratisch von der (Geschwindigkeits-, Druck-, E -, B -, ...) Amplitude abhängt, bedeutet dies für den Amplituden-Reflexionsfaktor $r = \pm 1$ (das Vorzeichen ist abhängig davon, ob am „losen“ oder am „festen“ Ende reflektiert wird).

Beispiel: Welle auf Seil (bei anderen Wellen gilt Entsprechendes)

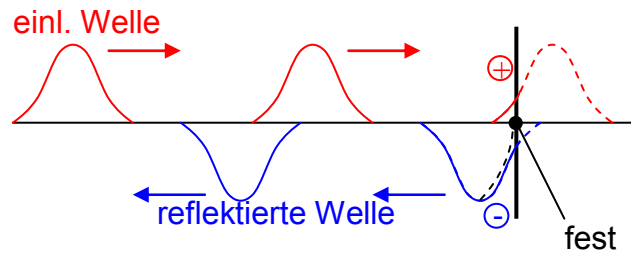
a) Festes Ende

Festes Ende

⇒ Auslenkung ist Null!

einlaufende Welle: z.B. Auslenkung +
Ende fest, 0

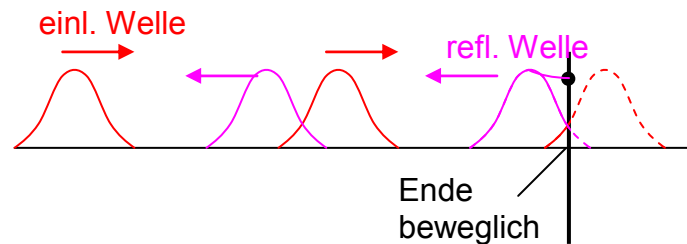
⇒ reflektierte Welle, Auslenkung -!



Reflexion am festen Ende:

- Vorzeichenwechsel, $r = -1$!
- harm. Welle (... $\sin(\dots)$): Phasensprung 180° (bzw. π)
- Überlagerung einl./refl. Welle: Seilende = 0, fest

b) Loses Ende



Reflexion am losen Ende:

- kein Vorzeichenwechsel, $r = +1$!
- kein Phasensprung!

Wie können diese Ergebnisse z.B. auf eine Welle auf einem Koax-Kabel übertragen werden ?

- „offenes Ende“ des Kabels (Abschlußwiderstand $\infty!$) bedeutet für die Spannung $U(x,t)$...
 „festes Ende“ „loses Ende“, $r = \dots\dots\dots$
- „kurzgeschl. Ende“ des Kabels (Abschlußwiderstand $0!$) bed. für die Spannung $U(x,t)$...
 „festes Ende“ „loses Ende“, $r = \dots\dots\dots$
- Was ändert sich, wenn man anstatt der Spannung den Strom betrachtet ?

4.2.3.2 Reflexion an Grenzflächen

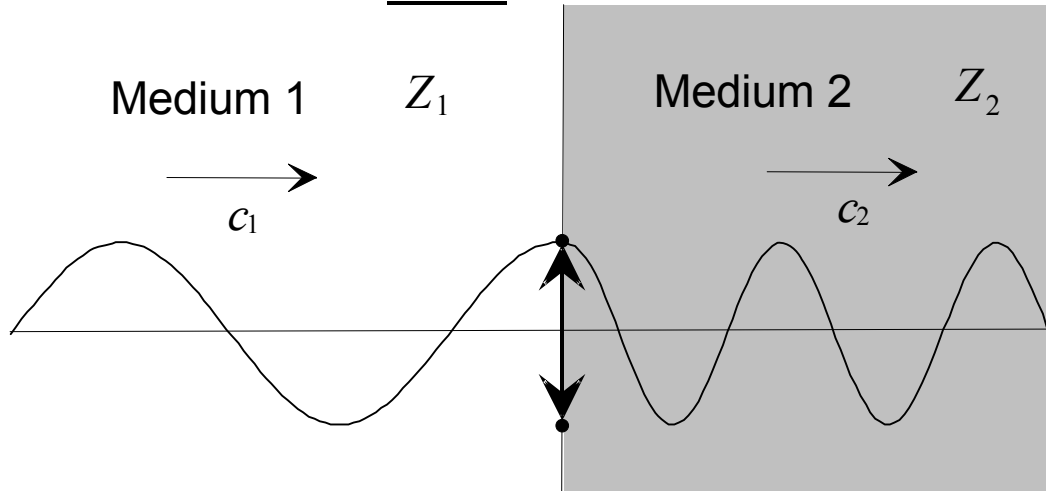
Was passiert, wenn eine Welle an eine Grenzfläche (Medium 1 \leftrightarrow Medium 2) kommt?

An der Grenzfläche ändern sich die Eigenschaften des Ausbreitungsmediums:

Phasengeschwindigkeit u. Wellenwiderstand

Beispiel:	Licht	Luft \leftrightarrow Glas
	Wasserwelle	Wassertiefe ändert sich
	Kabel	Übergang zw. versch. Koax-Kabeln
	Schall	Luft \leftrightarrow Wasser
	Seilwelle	„Knoten“, Übergang zw. Seilen mit versch. $A \cdot \rho$

a) Wir betrachten wieder zuerst die **Seilwelle**:



Beim Übergang 1 → 2 bleibt die Frequenz f (bzw. die Kreisfreq. ω) fest.
Wellenwiderstand und Phasengeschwindigkeit c ändern sich!

$c_1 \rightarrow c_2$, damit ändert sich auch die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$!

z.B. für $c_2 < c_1 \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1$

Direkt vor bzw. hinter der Grenzfläche muß die Auslenkung zu jedem beliebigem Zeitpunkt gleich groß sein (Stetigkeitsbedingung!), damit gilt auch für die Amplitude

Amplitude (links) = Amplitude (rechts) !

Entsprechendes gilt auch für die Geschwindigkeits-Amplitude $\hat{v} = \omega \hat{y}$.

An der Grenzfläche

}	f	fest ,
}	\hat{y}	
}	\hat{v}	
}	c	ändern sich !
}	Z	
}	λ	

Energietransport: Für die Intensität $I = w \cdot c$ der elast. Querwelle ergab sich (→4.2.2 a))

$$I = \frac{1}{2} \cdot (Z/A) \cdot \hat{v}^2$$

Damit ist im allg. der Energiefluß (= E-Flußdichte * Fläche) vor / hinter der Grenzfläche verschieden:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \cdot A_1 = \frac{1}{2} \hat{v}_1^2 \cdot Z_1 \\ I_2 \cdot A_2 = \frac{1}{2} \hat{v}_2^2 \cdot Z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 \cdot A_1 \neq I_2 \cdot A_2 !$$

Wo bleibt die Energie?

- an der Grenzfläche wird ein Teil der Welle **reflektiert**
- einlaufende u. reflektierte Welle überlagern sich
- resultierende Welle ist stetig, (kein „Sprung“ im Seil!)

Energie: „einlaufende Welle“ = „reflektierte Welle“ \oplus „transmittierte Welle“

$$I_e = I_r + I_t \quad (\text{bei konst. Querschnitt } A)$$

- Berechnung des Reflexionskoeffizienten für eine „Welle auf Seil“:

Energiefluß $\frac{dE}{dt} = I \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \rho c \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$
 $= \frac{1}{2} \cdot Z \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}^2$

Energieerhaltung: $\underbrace{\frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}_e^2}_{\text{einf. Welle}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot Z_2 \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}_t^2}_{\text{transm. Welle}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot Z_1 \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}_r^2}_{\text{refl. Welle}}$
 $Z_1 \cdot (\hat{y}_e^2 - \hat{y}_r^2) = Z_2 \cdot \hat{y}_t^2$ ①

Stetigkeit: $\underbrace{\hat{y}_e}_{\text{einf. Welle}} + \underbrace{\hat{y}_r}_{\text{refl. Welle}} = \underbrace{\hat{y}_t}_{\text{transm. Welle}}$ ②

aus ① ⇔ $Z_1 \cdot (\hat{y}_e - \hat{y}_r) \cdot (\hat{y}_e + \hat{y}_r) = Z_2 \cdot \underbrace{\hat{y}_t^2}_{=(\hat{y}_e + \hat{y}_r)^2!}$

mit ② ⇔ $\frac{\hat{y}_e - \hat{y}_r}{\hat{y}_e + \hat{y}_r} = \frac{Z_2}{Z_1}$

Def.: Reflexionskoeffizient $r = \frac{\hat{y}_r}{\hat{y}_e}$ [Gl.4.2.57.]

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

⇔ $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ (Amplituden-) **Reflexionskoeffizient** [Gl.4.2.58.]

Da der Energiefluß proportional zum Amplituden**quadrat** ist, ist der

Reflexionskoeffizient für den Energiefluß	$R = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$	[Gl.4.2.59.]
--	--	--------------

Der Transmissionskoeff. (für die Energie) ist def. durch $T = 1 - R = 1 - r^2$ [Gl.4.2.60.]

- für $Z_1 = Z_2$ ist $r = 0$, $R = 0$, keine Reflexion, Welle wird 100 % durchgelassen, $T = 100$ %
- für $Z_2 = 0$ ist $r = +1$, $R = 100$ %, vollständige Reflexion, $T = 0$, keine Transmission
Loses Ende → Welle wird ohne Vorzeichenwechsel reflektiert !
- für $Z_2 \rightarrow \infty$ wird $r = -1$, $R = 100$ %, vollständige Reflexion, $T = 0$, keine Transmission
Festes Ende → Welle wird mit Vorzeichenwechsel reflektiert !

b) Schall

- Berechnung des Reflexionskoeffizienten für eine Schallwelle (bei senkrechtem Einfall):

Energieerhaltung: $\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\hat{p}_e^2}{Z_1}}_{\text{einf. Welle}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\hat{p}_t^2}{Z_2}}_{\text{transm. Welle}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\hat{p}_r^2}{Z_1}}_{\text{refl. Welle}}$
 $Z_2 \cdot (\hat{p}_e^2 - \hat{p}_r^2) = Z_1 \cdot \hat{p}_t^2$ ①

Stetigkeit: $\underbrace{\hat{p}_e}_{\text{einf. Welle}} + \underbrace{\hat{p}_r}_{\text{refl. Welle}} = \underbrace{\hat{p}_t}_{\text{transm. Welle}}$ ②

In ① sind gegenüber oben (Welle auf Seil) lediglich Z_1 und Z_2 vertauscht! Folglich ergibt eine ähnlich Rechnung wie oben den...

Reflexionskoeffizienten für die Druckamplitude \hat{p} : $r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ [Gl.4.2.61.]

Für die Schallschnelle \hat{v} gilt dagegen $r_v = -r_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ [Gl.4.2.62.]

Der Reflexionskoeffizient für die Intensität der Schallwelle ist wie oben $R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$ [Gl.4.2.63.]

- Wie erreicht man bei Ultraschalluntersuchungen, daß die Ultraschallwelle in das „Untersuchungsobjekt“ eindringt ?
- Wie groß ist R u. T beim Übergang von Luft zu Wasser ?
- Wie wird beim Ohr erreicht, daß die Schallwelle mit geringsten Reflexionsverlusten von der Luft in die Flüssigkeit des Innenohres eindringen kann?

c) Kabel

Ein ähnliche Rechnung ergibt für ein Signal auf einem Kabel

Reflexionskoeffizient für die **Spannung** \hat{U} : $r_U = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ [Gl.4.2.64.]

Reflexionskoeffizient für den **Strom** \hat{I} : $r_I = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ [Gl.4.2.65.]

- für $Z_1 = Z_2$ ist $r_U = 0$, $R = 0$, keine Reflexion, Welle wird 100 % durchgelassen, $T = 100$ %
- für $Z_2 = 0$ ist $r_U = -1$, $R = 100$ % , vollständige Reflexion, $T = 0$, keine Transmission
Kurzgeschl. Ende \rightarrow Signal wird mit neg. Vorzeichen reflektiert !
- für $Z_2 \rightarrow \infty$ wird $r_U = +1$, $R = 100$ % , vollständige Reflexion, $T = 0$, keine Transmission
Offenes Kabelende \rightarrow Welle wird ohne Vorzeichenw. reflektiert !

d) elektromagn. Welle, Licht

Bei senkrecht Einfall von Licht auf eine Grenzfläche gelten die gleichen Regeln ...

Zu beachten ist, dass nach Gl.4.2.35. bzw. Gl.4.2.36. der Wellenwiderstand von ϵ_r bzw. vom

Brechungsindex n abhängt: $Z \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$

Damit wird der Reflexionskoeffizient für das E-Feld $r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ [Gl.4.2.66.]

und der Reflexionskoeffizient für die Intensität $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$ [Gl.4.2.67.]

Z.B. ist beim Übergang von Luft ($n_1 = 1$) zu Glas ($n_2 = 1.5$) $r_E = -0.2$ (negativ, \Rightarrow Reflexion mit Phasensprung am optisch dichteren Medium!) und $R = 4$ %, d.h. 4 % der Intensität werden reflektiert, 96 % werden transmittiert!

4.2.4 Stehende Wellen

Durch Reflexion von Wellen kommt es zwangsläufig zur Überlagerung von einlaufender Welle und reflektierter Welle.

Überlagerung von Wellen entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung kann jedoch auch durch zwei Quellen, die Wellen aufeinander senden, bewirkt werden.

Welche Form der Auslenkung ergibt sich durch Überlagerung einer in +x und einer in -x - Richtung laufenden Welle?

Wir betrachten nur den Fall gleicher Frequenz, gleicher Wellenlänge. Außerdem sollen beide Wellen die gleiche Amplitude haben.

Welle ①: $y_1 = \hat{y} \cdot e^{j(+k \cdot x - \omega \cdot t)}$

Welle ②: $y_2 = \hat{y} \cdot e^{j(-k \cdot x - \omega \cdot t)}$

Bem: Eine mögl. Phasenverschiebung zwischen den beiden Wellen können wir o.B.d.A. außer Betracht lassen, wenn der x- und t- Nullpunkt geeignet gewählt wurde!

Überlagerung : $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$
 $y = \hat{y} \cdot \underbrace{(e^{j \cdot k \cdot x} + e^{-j \cdot k \cdot x})}_{2 \cos(k \cdot x)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$

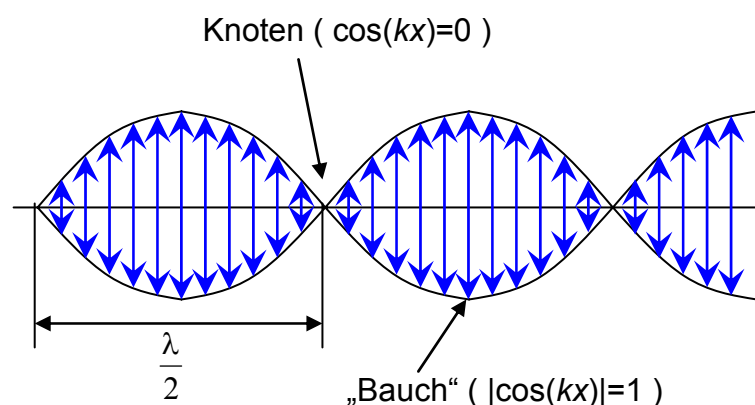
$$y = \hat{y} \cdot 2 \cos(k \cdot x) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

bzw. $y = \hat{y} \cdot 2 \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$ (ohne kompl. Zahlen)

- **Keine** „laufende“ Welle ($y \neq y(k \cdot x - \omega \cdot t)$)
- **Harmonische Schwingung** $\sim e^{-j \cdot \omega \cdot t}$, $\sim \cos(\omega \cdot t)$
- **Amplitude:** $2 \cdot \hat{y} \cdot \cos(k \cdot x)$, ortsabhängig, mit cos-Fkt. „moduliert“ !

Stehende Welle

- alle Punkte schwingen phasengleich (bzw. um 180° phasenverschoben),
- alle Punkte laufen gleichzeitig durch Nulllage
- Ampl. ist max. am „Schwingungsbauch“
- Ampl.=0 am „Knoten“

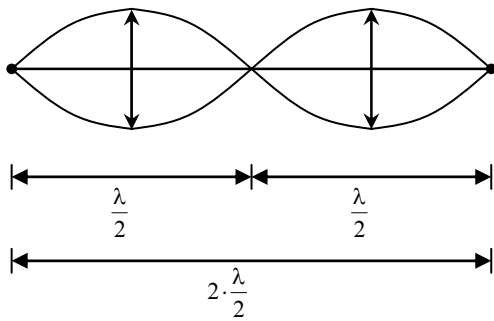


- Abstand zw. 2 Knoten (2 Bäuchen) : $\underline{\lambda/2}$! [Gl.4.2.68.]

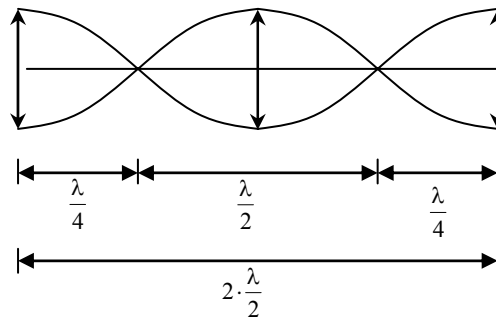
Eine „**stehende Welle**“ kann am einfachsten erzeugt werden, indem man ein Welle an beiden Enden eines Mediums (einer Leitung) reflektiert. Wenn die Erregerfrequenz passend gewählt wird, so daß die Länge der Leitung in einem „passenden“ Verhältnis zur Wellenlänge steht, so bildet sich durch die hin- und herlaufenden Wellen eine stehende Welle (oder „**Eigenschwingung**“) aus.

- **beide Enden fest/lose:**

fest



lose



Beide Enden sind ... Knoten

... Bäuche

Gesamtlänge (z.B. des Seils): ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ (in beiden Fällen)

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

[Gl.4.2.69.]

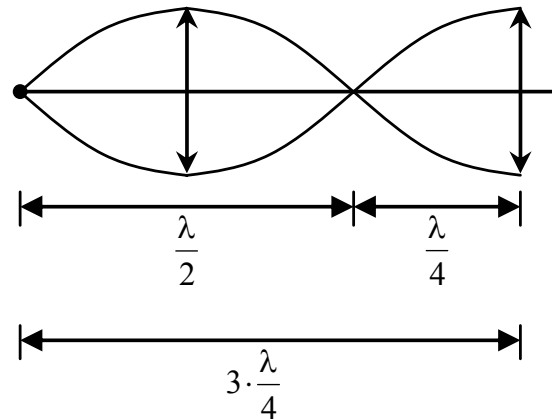
• 1 loses und 1 festes Ende:

Ein Ende ist Knoten,
das andere Ende ist Bauch

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

[Gl.4.2.69.]



Bsp.: Saite, beide Enden fest

Grundfrequenz: $L = 1 \cdot \frac{\lambda_1}{2}, \quad \lambda_1 = 2 \cdot L, \quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2 \cdot L}$

n-te Oberschwingung: $L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n}, \quad f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2 \cdot L} \cdot n = n \cdot f_1$

4.2.5 Doppler-Effekt

Wenn sich die „Quelle“ (Sender, Erreger) der Welle und/oder der „Beobachter“ (Empfänger) bewegt, dann unterscheiden sich die Frequenzen der Quelle und des Beobachters. Bei Wellen, die sich in einem Medium ausbreiten (z.B. Schall) muß unterschieden werden zwischen ...

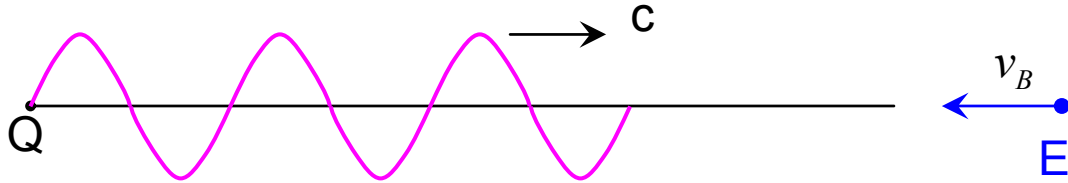
a)	Q. ruht	B. bewegt	Q ● ← B
b)	Q. bewegt	B. ruht	Q → ● B
c)	Q. bewegt	B. bewegt	Q → ← B
d)	elektromagnetische Wellen (Licht), Q. u. B. bewegen sich <u>relativ</u> zueinander, keine Unterscheidung ob sich Q. oder B. bewegen!		

Bei b) (Q. bewegt) werden wir zusätzlich den Fall betrachten, daß sich die Quelle mit Geschwindigkeit $v_Q > c$ („Überschallgeschwindigkeit“) bewegt.

Der Doppler-Effekt bewirkt z.B. eine hörbare Frequenzverringernung, wenn ein Auto mit hoher Geschwindigkeit am Beobachter vorbeifährt. Anwendungsbeispiele:

- Astronomie: Messung der Geschw. von Sternen relativ zur Erde („Rotverschiebung“)
- Medizin: Messung von Strömungsgeschw. (Blut) und Bewegungsabläufen (z.B. Herz)
- Verkehrsüberwachung: Doppler-Radar, Geschw.-Messung mit Mikrowellen

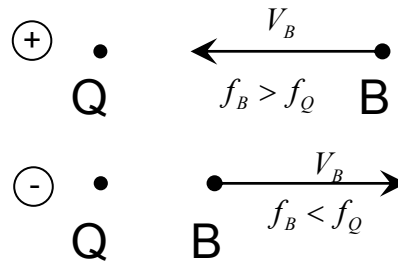
a) Q. ruht, B. bewegt



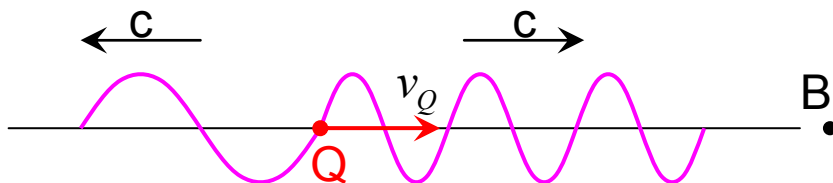
- Q sendet Welle der Frequenz $f_Q = \frac{c}{\lambda}$ aus
- Phasengeschw. der Welle: c Geschw. von B : v_B
- Geschw. von B relativ zu einem Punkt konstanter Phase der Welle: $v' = c + v_B$
- Zeit für eine Wellenlänge $T_B = \frac{\lambda}{v'} = \frac{\lambda}{c + v_B}$
- Frequenz, die B beobachtet: $f_B = \frac{1}{T_B} = \frac{c + v_B}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$

$$f_B = f_Q \cdot \left(1 \pm \frac{|v_B|}{c}\right)$$

[Gl.4.2.70.]



b) B. ruht, Q. bewegt



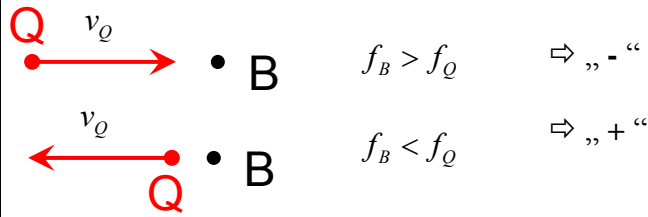
Welle wird vor der Quelle „zusammengedrückt“,
hinter der Quelle „auseinandergezogen“:

- Q bewegt sich in einer Periode um $v_Q \cdot T_Q$
- um diesen Betrag verkürzt (bzw. verlängert) sich die Wellenlänge λ : $\lambda_B = \lambda - v_Q \cdot T_Q$

$$f_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{c}{\lambda - v_Q \cdot T_Q} = \frac{c}{\underbrace{\lambda}_{f_Q} \cdot \underbrace{1 - v_Q \cdot \frac{T_Q}{\lambda}}_{1/c}}$$

$$f_B = f_Q \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{|v_Q|}{c}}$$

[Gl.4.2.71.]



Die Formel mit „-“ gilt sicher nur für $v_Q < c$! Warum ?

Was passiert, wenn die Geschwindigkeit der (Schall-) Quelle immer größer wird, d.h. für $v_Q \rightarrow c$ bzw. $v_Q > c$?

☞ Gibt es den Fall $v_Q = c$ bzw. $v_Q > c$ auch bei elektromagn. Wellen / Licht ? Warum ?

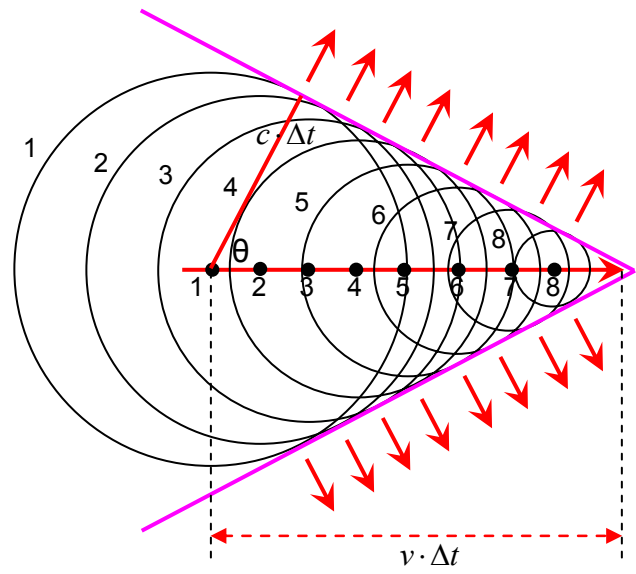
- a) im Vakuum ?
- b) in einem Medium mit Brechzahl n ?

☞ Wir können uns also für den Fall $v_Q > c$ auf Wellen beschränken, die sich in einem Medium ausbreiten, z.B. ...

Schall:

Wenn sich die Schallquelle mit $v_Q > c$ bewegt, muß die räumliche (2- bzw. 3-dimensionale) Ausbreitung der Schallwellen beachtet werden (vergl. Kap. 4.2.9).

Die Druckwellen, die zu versch. Zeiten an verschiedenen Positionen (Skizze \rightarrow • 1, • 2, ... • 8) z.B. von einem Flugzeug ausgesandt wurden, breiten sich kugelförmig aus. Die Überlagerung dieser Kugelwellen ergibt eine kegelförmige Wellenfront, den **Machschen Kegel**. Der Beobachter, der von dieser Wellenfront „getroffen“ wird, hört dies als **Überschallknall**.



Der Winkel, unter dem sich die Wellenfront ausbreitet, ergibt sich zu

$$\cos \theta = \frac{c \cdot \Delta t}{v \cdot \Delta t} = \frac{c}{v}$$

[Gl.4.2.72.]

($\cos \theta \leq 1 \Rightarrow v \geq c$!)

Elektromagn. Wellen: Bewegt sich ein geladenes Teilchen mit Geschwindigkeit $v_Q > c_0/n$ durch ein optisch durchlässiges Medium (Brechzahl n), so tritt der Effekt auch in der Optik auf. Dieser „optische Überschallknall“ wird dann als „Cerenkovstrahlung“ (z.B. als bläuliches Leuchten in Wasser) sichtbar.

c) Q. und B. bewegen sich

(Kombination von a) und b))



Zunächst wird die Frequenz $f_{B'}$ berechnet, die ein ruhender Beobachter von der bewegten Quelle empfangen würde (Formel aus b)). Mit dieser als „neuer Quellenfreq. $f_{Q'}$ “ errechnet man dann die Frequenz f_B , die der bewegte Beobachter letztlich „sieht“ (Formel aus a)).:

$$f_Q \xrightarrow[\text{B. ruht}]{\text{Q. bew.}} f_{B'} = f_{Q'} \xrightarrow[\text{B. bew.}]{\text{Q. ruht}} f_B$$

Es ergeben sich (je nach Bewegungsrichtung von Q. u. B.) **4** Fälle:

$$f_B = f_Q \cdot \frac{c \pm |v_B|}{c \pm |v_Q|}$$

[Gl.4.2.73.]

Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn eine Welle an einem bewegten Objekt reflektiert wird (z.B. bei Ultraschall-Doppler-Untersuchung). In diesem Fall bewegt sich der „Beobachter B'“ (Reflektor) und sendet (als bewegte Quelle Q') eine Welle mit der von ihm empfangenen Frequenz aus, die schließlich vom ruhenden Beobachter B empfangen wird:

$$f_Q \xrightarrow[\text{B. bew.}]{\text{Q. ruht}} f_{B'} = f_{Q'} \xrightarrow[\text{B. ruht}]{\text{Q. bew.}} f_B$$

d) Elektromagnetische Wellen (Licht)

- kein „Medium“, Geschwindigkeit der Wellen ist **immer c** , nicht $c \pm v$!!!
- kein Unterschied, ob Q. oder B. bewegt, es kommt nur auf die **Relativgeschwindigkeit** an! Aber: Es muß relativistisch gerechnet werden ...
- Bei relativistischer Rechnung (\Leftrightarrow Zeitdilatation, bewegte „Uhr“ läuft um Faktor γ langsamer!) ergibt sich auch eine Frequenzverschiebung, wenn sich die Quelle **quer** zur Linie Q-B bewegt: „Transversaler Dopplereffekt“:



$$T_B = \gamma \cdot T_Q$$

$$f_B = \frac{1}{T_B} = \frac{1}{\gamma \cdot T_Q} = f_Q \cdot \frac{1}{\gamma} = f_Q \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad [\text{Gl.4.2.74.}]$$

- Bewegen sich Q. und B. aufeinander zu (bzw. voneinander weg), so tritt neben der Zeitdilatation noch der Effekt auf, daß auf Grund des sich verändernden Abstands die Wellenzüge (wie in Fall B. ruht, Q bewegt !) zusammengedrückt (bzw. „auseinandergezogen“) werden. Somit erhält man für den „longitudinalen Dopplereffekt“:

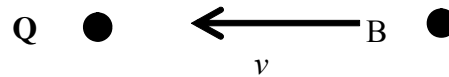
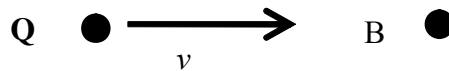
„Formel aus b)“ * „Zeitdilatation“

$$f_B = f_Q \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

$$= f_Q \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}} = f_Q \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

[Gl.4.2.75.]

$v > 0 \Leftrightarrow$ Q. u. B. bew. sich aufeinander zu



(Formel gilt für beide Fälle!)

Bewegen sich Q. u. B. voneinander weg, so ist einfach $v < 0$ einzusetzen.

Bei relativistischer Rechnung ergibt sich also für den longitudinalen Dopplereffekt bei **em-Wellen** ein Ergebnis, das gerade zwischen den zwei „klassischen“ Fällen „bewegter Beobachter“ bzw. „bewegte Quelle“ liegt!

Für **em-Wellen**:

statt $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f_Q \cdot \frac{c+v_B}{c} \\ \text{b) } f_Q \cdot \frac{c}{c-v_Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d) } f_B = f_Q \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ [Gl.4.2.76.]

v : Relativgeschwindigkeit Q-B

Die Zeitdilatation ist vernachlässigbar, falls $v \ll c$. Für diesen Fall liefern alle 3 Formeln das gleiche Ergebnis:

	Für $v \ll c$ bzw. $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ ergibt sich mit $\frac{1}{1-\beta} \approx 1+\beta \dots$
a) bewegte Quelle	$f_B = f_Q \cdot (1+\beta)$
b) bewegter Beobachter	$f_B = f_Q \cdot \frac{1}{1-\beta} \approx f_Q \cdot (1+\beta)$
d) em-Wellen, relativistisch, longitudinal	$f_B = f_Q \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx f_Q \cdot \sqrt{(1+\beta) \cdot (1+\beta)} = f_Q \cdot (1+\beta)$

Bei Reflexion an einem bewegten Objekt (siehe c)!) erhält man für $\beta \ll 1$ die doppelte Frequenzverschiebung:

$$f_B = f_Q \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} \approx f_Q \cdot (1+\beta) \cdot (1+\beta) \approx f_Q \cdot (1+2\beta)$$

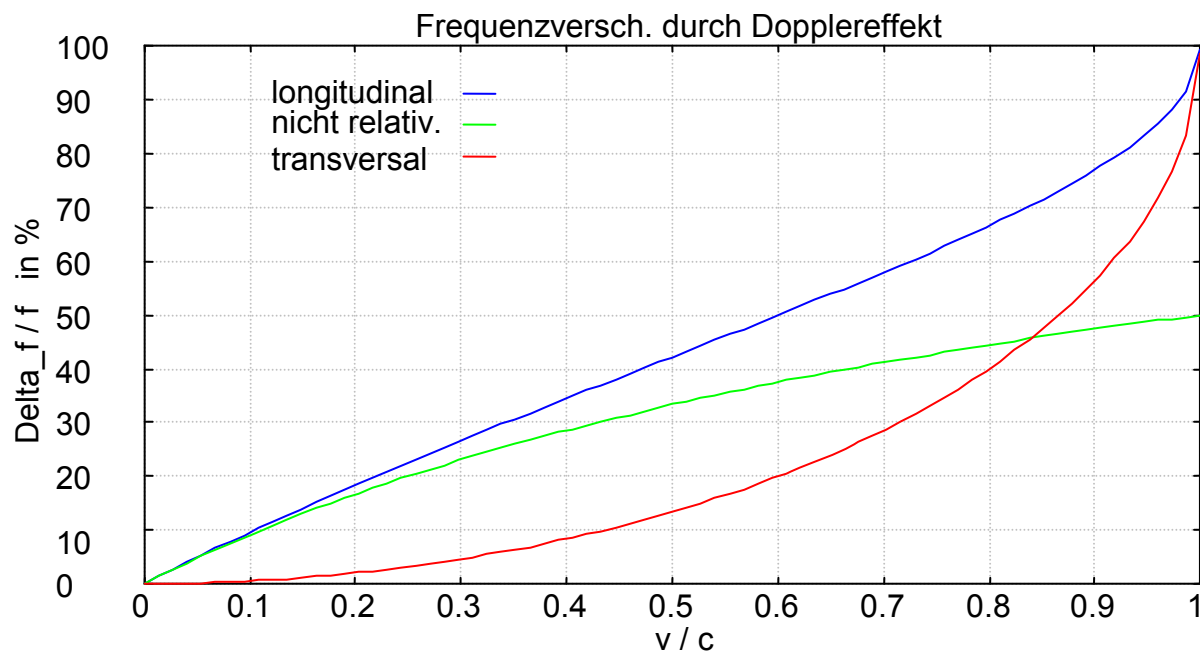
☞ Welche Näherungsformel erhält man beim transversalen Dopplereffekt (Zeitdilatation) für $\beta \ll 1$?

.....
Wo ist der (entscheidende) Unterschied zu obigen Formeln?

Bsp.: Doppler-Frequenzerniedrigung $\frac{\Delta f}{f}$ in % (siehe Diagr. u. Datei „doppler.plt“)

(Für long. Dopplereffekt: Q. u. B. entfernen sich voneinander, also $f_B < f_Q$)

	$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_Q - f_B}{f_Q} = 1 - \frac{f_B}{f_Q}$, $\beta = \frac{v}{c}$
nichtrelativistisch , Q. bewegt (nur longitudinal!)	$\frac{\Delta f}{f} = 1 - \frac{1}{1 + \beta}$
relativistisch, longitudinal	$\frac{\Delta f}{f} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$
relativistisch, transversal	$\frac{\Delta f}{f} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$



Man erkennt:

Bei kleinen Geschwindigkeiten $v \ll c$...

- spielt der transversale Dopplereffekt (Zeitdilatation) keine Rolle⁵
- ergeben relativistische und nichtrelativistische Rechnung das gleiche Ergebnis für den longitudinalen Dopplereffekt: $\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{v}{c}$

Bei großen Geschwindigkeiten ...

- ergibt die nichtrelativistische Rechnung eine Frequenzverschiebung um maximal 50%
- bei Berücksichtigung der relativistischen Zeitdilatation kann die Frequenzverschiebung dagegen bis zu 100% erreichen (⇒ Freq. geht gegen Null!).

⁵ Trotzdem begrenzen gerade diese Effekte derzeit die Genauigkeit von Atomuhren, da die Atome dort nicht in Ruhe sind und auch nicht alle mit der gleichen Geschwindigkeit fliegen!

Ergänzung:

Die Formeln für den Doppler- Effekt lassen sich leicht ableiten, wenn man beachtet, daß „Q“ und „B“ den gleichen Vorgang in verschiedenen **Bezugssystemen** beschreiben. Die Umrechnung zwischen diesen Systemen geschieht nichtrelativistisch mit Hilfe der **Galilei-Transformation**, relativistisch mit Hilfe der **Lorentz-Transf.** (siehe dazu Kap. 2.1 und 2.4!). Wir betrachten hier nur den nichtrelativistischen Fall der **Galilei-Transformation**:

$$x' = x - vt \quad (*) \quad \text{bzw.} \quad x = x' + vt \quad (**) \quad (t = t' !)$$

a) Bewegter Beobachter

Die von Q ausgesandte Welle ist im System S (Q ruht):

$$y = \hat{y} \cos(kx - \omega t) \quad (\text{Ausbreitungsrichtung : } +x !)$$

Mit (**) ergibt sich (System S' bewegt sich mit v_B in +x-Richtung von Q weg)

$$y = \hat{y} \cos(k(x' + v_B t) - \omega t) \quad , \quad y = \hat{y} \cos(kx' - (\omega - kv_B)t)$$

Im System S' des Beobachters wird die Welle beschrieben durch

$$y = \hat{y} \cos(kx' - \omega' t)$$

Vergleich liefert $\omega' = \omega - kv_B$

$$\Rightarrow \quad 2\pi f' = 2\pi f - \frac{2\pi}{\lambda} v_B \quad , \quad f' = f - \frac{1}{\lambda} v_B \quad , \quad f' = f \left(1 - \frac{v_B}{\lambda f} \right)$$

Mit $c = \lambda f$ ergibt sich die Formel für den Doppler-Effekt: $f' = f \left(1 - \frac{v_B}{c} \right)$ [Gl.4.2.77.]

b) Bewegte Quelle (Q bewegt sich in +x-Richtg. auf B zu!)

Im bew. System S' ist $y = \hat{y} \cos(k'x' - \omega' t)$

Mit (*) ergibt sich $y = \hat{y} \cos(k'(x - v_Q t) - \omega' t)$, $y = \hat{y} \cos(k'x - (\omega' + k'v_Q)t)$

Im ruhenden System S des Beobachters ist

$$y = \hat{y} \cos(kx - \omega t)$$

Vergleich liefert $\omega = \omega' + k'v_Q$

$$\Rightarrow \quad 2\pi f = 2\pi f' + \frac{2\pi}{\lambda'} v_Q \quad , \quad f = f' + \frac{1}{\lambda'} v_Q \quad , \quad f = f' \left(1 + \frac{v_Q}{\lambda' f'} \right)$$

Die Welle bewegt sich im System S mit c . Das bewegte System S' „fährt der Welle hinterher“. Die Welle hat deshalb in S' die geringere Geschwindigkeit $c' = c - v_Q$! Mit

$$c' = \lambda' f' \text{ ergibt sich } f = f' \left(1 + \frac{v_Q}{c - v_Q} \right) = f' \left(\frac{c}{c - v_Q} \right) \quad \text{oder : } f = \frac{f'}{1 - \frac{v_Q}{c}} \quad [\text{Gl.4.2.78.}]$$

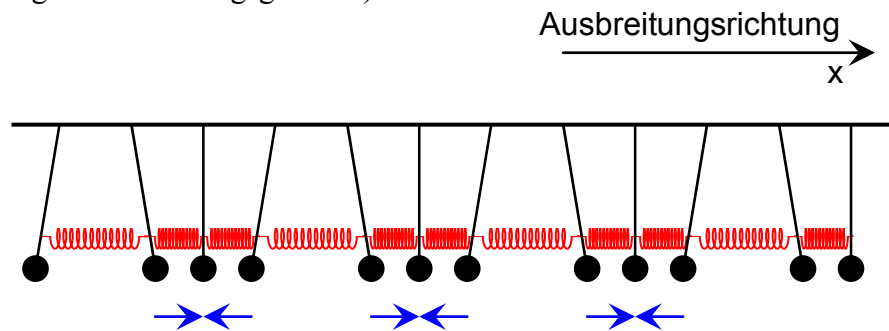
4.2.6 Polarisation

Die „Störung“ $y(x,t)$, die sich als Welle ausbreitet, kann ein Skalar (Temp., Druck, ...) oder ein Vektor (Geschwindigkeit, E-Feld, ...) sein. Bei Vektoren kommt es auf die Richtung an, wir unterscheiden **longitudinale u. transversale Wellen**:

Longitudinale Welle (Längswelle)

(Schwingungsrichtung \parallel Ausbreitungsgeschw.)

Bsp. :
Longitudinale
Welle auf
Pendelkette:



Pendel schwingen in x-Richtung, **parallel** zur Ausbreitungsrichtung der Welle

Wichtigstes Beispiel für longitudinale Wellen:

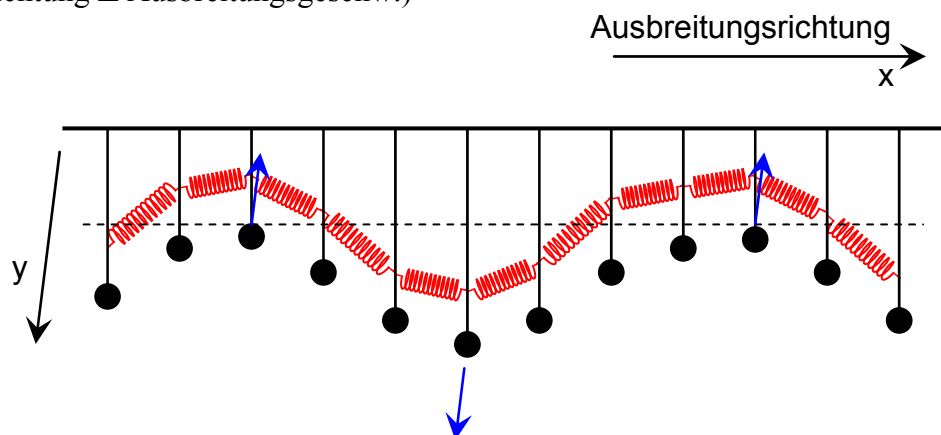
Schall \Leftrightarrow Elastische Längswellen in Gasen, Flüssigkeiten, Festkörpern

(In Gasen u. Flüssigkeiten gibt es nur elast. Längswellen, in Festkörpern auch Querwellen - warum ?)

Transversale Welle (Querwelle)

(Schwingungsrichtung \perp Ausbreitungsgeschw.)

Bsp. :
Transversale
Welle auf
Pendelkette:



Pendel schwingen in y-Richtung, **quer** zur Ausbreitungsrichtung der Welle

Wichtigstes Beispiel für transversale Wellen:

Elektromagnetische Welle, Licht! Bei em-Wellen wird zur Beschreibung der Schwingungsrichtung normalerweise der E-Vektor verwendet. B steht senkrecht dazu, siehe Kap. 4.2.1.3.

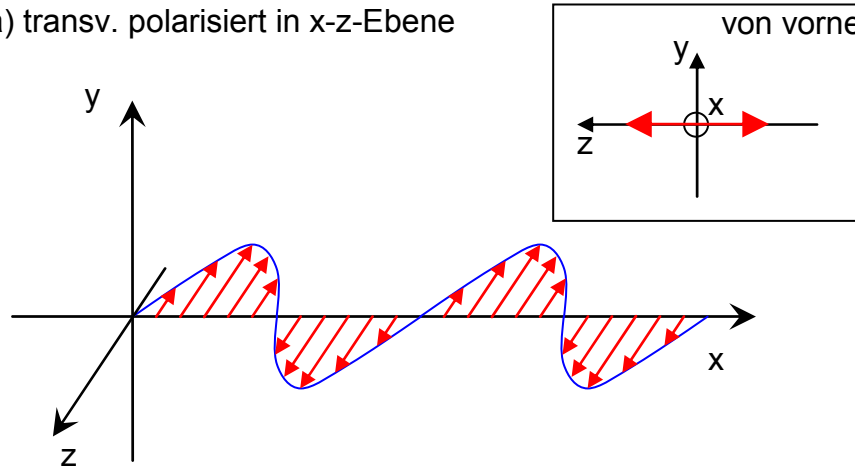
Die transversale Welle kann verschiedene **Polarisation**szustände haben:

- unpolarisiert: Welle schwingt in keiner festen Richtung zufällige, häufig wechselnde Schwingungsrichtung

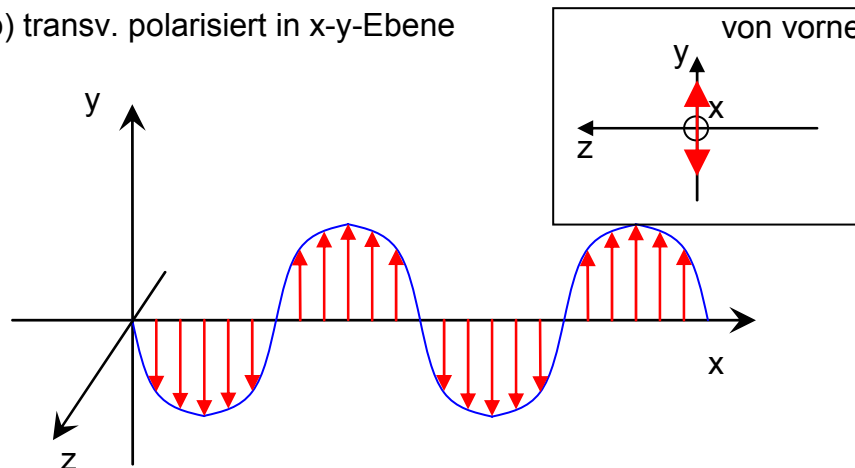
➤ **Lineare Polarisation:** Welle (z.B. **E-Vektor**) schwingt in fester Richtung, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Bei linearer Polarisation bleibt der Schwingungsvektor in **einer Ebene**.

Bsp. (Ausbreitungsrichtung ist x) : Der E-Vektor kann in der x - z -Ebene (a) , in der x - y -Ebene (b) (oder (c) in einer anderen, gegen die y -Achse gedrehten Ebene liegen)

a) transv. polarisiert in x - z -Ebene

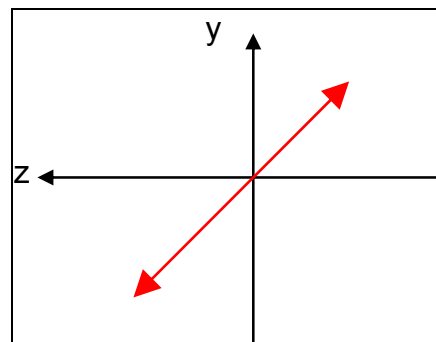


b) transv. polarisiert in x - y -Ebene



c) lin. polarisiert, aber
Polarisationsebene gedreht:

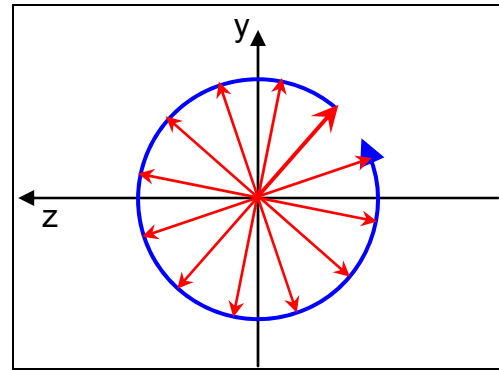
Lineare Polarisation :



- **zirkulare u. elliptische Polarisation :**
Der E-Vektor kann sich aber auch drehen ...
Ist dabei der Betrag konstant ergibt sich ...

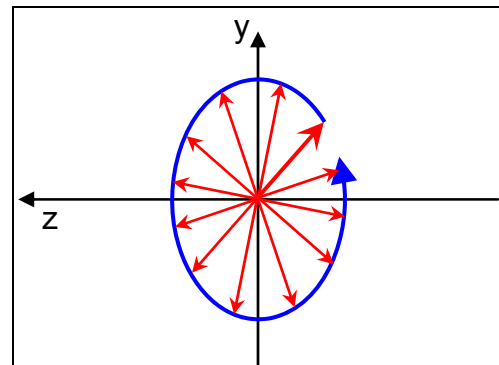
Zirkulare Polarisation :

(rechtszirkular oder linkszirkular polarisierte Welle)



Ist der Betrag nicht konstant ergibt sich ...

Elliptische Polarisation:



Erzeugung

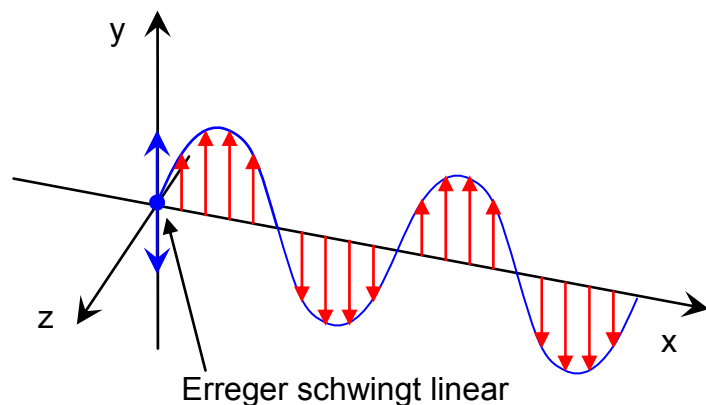
und Anwendung von linear, zirkular bzw. elliptisch polarisierten Wellen (spez. Licht!!!):

- Entweder „direkt“, d.h. bereits der Erreger der Welle schwingt entsprechend *oder*
- aus unpol. Wellen durch entspr. **Filter**

Beispiel: Mech. **Welle auf Seil**

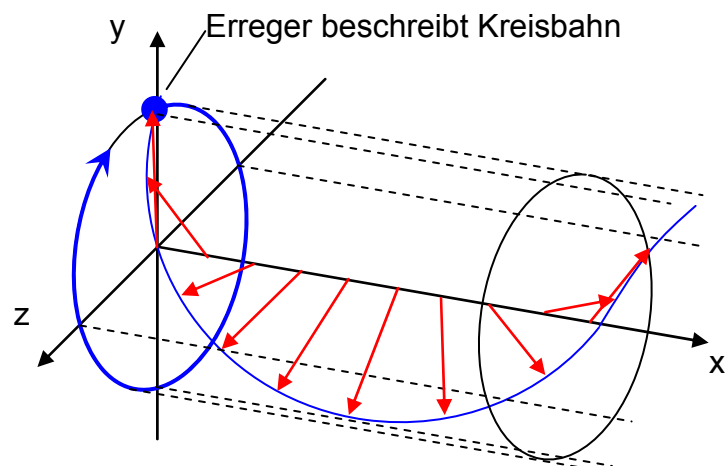
a) Linear polarisierte Welle:

Erreger (Seilanzfang) bewegt sich linear, erzeugt **Auslenkung in einer Ebene**



b) Zirkular polarisierte Welle

Erreger bewegt sich kreisförmig,
Auslenkung des Seils liegt auf
Kreiszyylinder

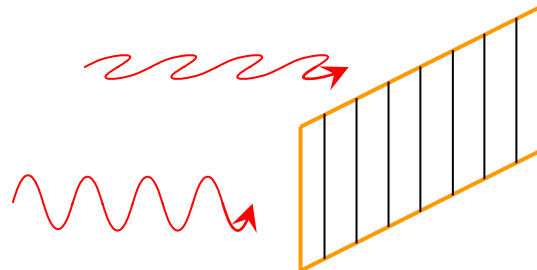


Die Polarisationsrichtung von elektromagnetischen Wellen (Radio, TV, ...) wird durch die Antennenorientierung definiert. Für den Empfang terrestrischer TV-Sender werden beispielsweise die Antennenstäbe für die meisten Sender (aber nicht für alle!) horizontal ausgerichtet.

Polarisierte Wellen können aus unpolarisierten durch entsprechende Filter erzeugt werden.

Bsp. : Drahtrahmen als Mikrowellen-Polarisator

- In welche Richtung muß der E-Vektor zeigen, damit eine em-Welle von einem Gitter aus parallel gespannten Drähten durchgelassen wird? Was passiert im anderen Falle (Polarisationsrichtung um 90° gedreht) mit der Welle?



Lin.-Polfilter für Licht (Polfilter für Kameras, Sonnenbrillen, 3-d-Bilder ...)

- Wie „funktioniert“ ein Polarisationsfilter aus Kunststoff?

Polarisationsfilter können als

- **Polarisator** (Erzeugung von pol. Licht aus unpolarisiertem Licht) oder als
- **Analysator** (Nachweis der Polarisation) verwendet werden.

Reflexion, Brechung, Streuung von Licht sind polarisationsabhängig. Unpolarisiertes Licht wird durch diese Vorgänge (teilweise) polarisiert. Licht, das an der Oberfläche von opt. durchlässigen Medien (Wasser, Glas, ...) reflektiert wird, ist polarisiert (Polarisationsgrad ist abh. vom Einfallswinkel). Durch Polarisationsfilter lassen sich also Lichtreflexe an Glas oder Wasseroberflächen vermindern. Auch das Licht des Regenbogens und das Himmelsblau sind stark polarisiert!

LCD- (Flüssigkristall-) Anzeigen und schnelle „Lichtschalter“ (Lichtmodulatoren) arbeiten mit polarisiertem Licht. Sie verwenden Elemente, mit denen abhängig von einer Steuerspannung die Polarisationssebene des Lichts gedreht werden kann.

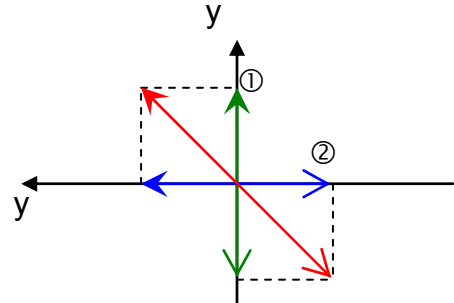
Zirkulare Polarisation kann durch geeignete Überlagerung von 2 lin. polarisierten Wellen erzeugt werden. Betrachten wir deshalb allg. die ...

Überlagerung von 2 linear, senkrecht zueinander **polarisierten Wellen** gleicher Ausbreitungsrichtung u. gleicher Frequenz:

a) gleiche Phase:

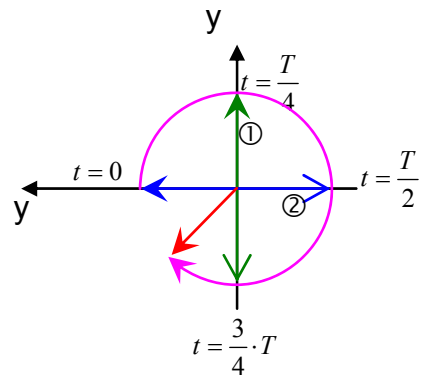
Welle1 } gleichzeitig (Min., Max., Null...)
Welle2 }

Schwingungsebene der resultierenden Welle ist fest.
→ linear polarisierte Welle
→ Richtung abhängig von Amplitude ① u. Amplitude ②



b) 90° Phasenverschiebung:

Ist Welle 2 (z-Richtung) gegenüber Welle 1 (y-Richtung) um 90° phasenverschoben ($\sin(\omega \cdot t) \rightarrow \cos(\omega \cdot t)$), so ergibt sich aus der Überlagerung eine Kreisbewegung (beispielsweise) des E-Vektors:



Welle 1 : $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin\text{-Schwingung in y}$

Welle 2 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\text{-Schwingung in z}$

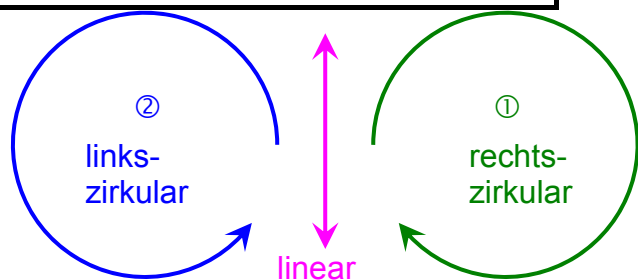
Überlagerung: $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega \cdot t) \\ \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Kreisbewegung in der y-z-Ebene}$

gleiche Amplitude , 90° Phasenverschiebung \Rightarrow zirkulare Polarisation

Verschiedenen Amplituden der 2 linear polarisierten Wellen oder $\Delta\varphi \neq 90^\circ \Rightarrow$ Ellipse :

verschiedene Amplitude und/oder $\Delta\varphi \neq 90^\circ$: \Rightarrow elliptische Polarisation

☞ Analog dazu läßt sich aber auch jede linear polarisierte Welle als Überlagerung einer rechtszirkularen und einer linkszirkularen Welle auffassen!



Wie ist ein Zirkularpolarisationsfilter aufgebaut? Hier wird zunächst mit einem lin.-Polfilter linear polarisiertes Licht erzeugt, dessen Polarisationsrichtung gegen die „y“-Achse um 45° gedreht ist. Dies entspricht der Überlagerung zweier (phasengleicher !) Wellen in y- u. z-Richtung. Wird nun eine dieser 2 Wellen um 90° phasenverschoben ($\frac{1}{4}$ Wellenlänge!), dann ergibt die Überlagerung rechts- oder linkszirkular polarisiertes Licht.

Die Phasenverschiebung erzeugt man mit (anisotropen) doppelbrechenden Materialien. Bei diesen hängt der Brechungsindex und damit die Phasengeschwindigkeit von der Polarisationsrichtung ab. Die Schichtdicke wird dabei so gewählt, daß zwischen den 2 Wellen ein Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge entsteht (Viertelwellenplättchen oder $\lambda/4$ -Plättchen).

Was passiert, wenn rechtszirkular polarisiertes Licht senkrecht auf eine Metallfläche trifft ?



4.2.7 Interferenz

Überlagerung von 2 Wellen mit

- gleicher Wellenlänge / Frequenz
- gleicher Ausbreitungsrichtung
- gleicher Amplitude
- (*gleicher Polarisation*)

am gleichen Ort.

aber: verschiedener Phase

$$y_1 = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)}$$

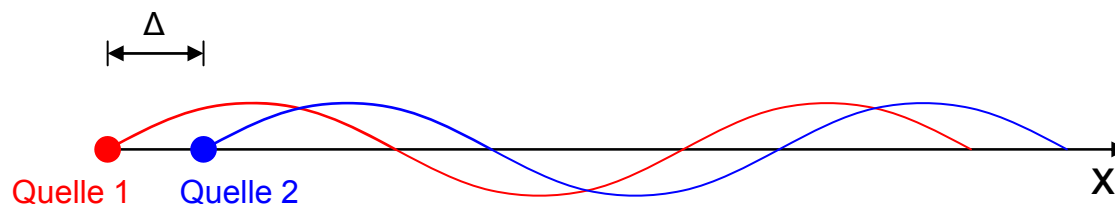
$$y_2 = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t - \varphi)}$$

Die Phasenverschiebung φ der Welle 2 entspricht einem Gangunterschied Δ :

$$y_2 = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot (x - \Delta) - \omega t)} \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\varphi}{k} \quad \Delta = \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right) \cdot \lambda \quad [\text{Gl.4.2.79.}]$$

$$\varphi = \Delta \cdot k \quad \varphi = \Delta \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

Bsp.: 2 Wellen kommen von verschiedenen Quellen (Lautsprecher, Antennen...), Abstand Δ



Weitere Möglichkeiten, einen Gangunterschied bzw. eine Phasenverschiebung zu erzeugen:

- Mehrere Quellen (Sendeantennen, Lautsprecher, ...) , die dicht beieinander liegen, aber phasenverschoben angesteuert werden.
- Wellen kommen von einer Quelle, durchlaufen aber verschiedene Wege und werden später zusammengeführt.
- Die zwei Wellen laufen mit verschiedener Phasengeschwindigkeit, z.B. bei Licht durch Medien mit unterschiedlicher Brechzahl n („optischer Weg“ ist verschieden!).

Durch Überlagerung der zwei Wellen ergibt sich je nach Phasenunterschied

konstruktive Interferenz	Wellen <u>berg</u> auf Wellen <u>berg</u>	Wellen verstärken sich	$\Delta = 0, \lambda, 2\lambda \dots$ $\Delta = m \cdot \lambda$
destruktive Interferenz	Wellen <u>tal</u> auf Wellen <u>berg</u>	Wellen löschen sich aus (bei gleicher Amplitude vollständig)	$\Delta = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda \dots$ $\Delta = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

...oder ein Zwischenwert.

Rechnerisch:

$$y_1 = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

$$y_2 = \hat{y} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega \cdot t - k \cdot \Delta)}$$

Überlagerung:

$$y = y_1 + y_2 = \hat{y} \cdot \left\{ e^{j(k \cdot x - \omega \cdot t)} + e^{j(k \cdot x - \omega \cdot t - k \cdot \Delta)} \right\}$$

Fügt man im Exponenten des ersten Summanden $-\frac{k \cdot \Delta}{2} + \frac{k \cdot \Delta}{2} (=0)$ ein und zerlegt im

zweiten Summanden $k \cdot \Delta$ gemäß $k \cdot \Delta = \frac{k \cdot \Delta}{2} + \frac{k \cdot \Delta}{2}$ so ergibt sich ...

$$y = \hat{y} \cdot \left\{ e^{j\left(k \cdot x - \omega \cdot t - \frac{k \cdot \Delta}{2} + \frac{k \cdot \Delta}{2}\right)} + e^{j\left(k \cdot x - \omega \cdot t - \frac{k \cdot \Delta}{2} - \frac{k \cdot \Delta}{2}\right)} \right\}$$

$$y = \hat{y} \cdot e^{j\left(k \cdot x - \omega \cdot t - \frac{k \cdot \Delta}{2}\right)} \underbrace{\left\{ e^{+j\frac{k \cdot \Delta}{2}} + e^{-j\frac{k \cdot \Delta}{2}} \right\}}_{=2 \cos\left(\frac{k \cdot \Delta}{2}\right)}$$

Die erste exp-Funktion ist eine harm. Welle, deren Phasenlage (bzw. Gangunterschied) gerade zwischen Welle 1 und Welle 2 liegt. Der 2. Term {...} hängt weder von x noch von t ab. Er beeinflusst lediglich die Amplitude der resultierenden Welle:

$$y(x, t) = \underbrace{2 \cdot \hat{y} \cdot \cos(k \cdot \Delta / 2)}_{\text{Amplitude, abh. von } \Delta} \cdot \underbrace{e^{j\left(k \cdot x - \omega \cdot t - \frac{k \cdot \Delta}{2}\right)}}_{\text{harm. Welle, Gangunterschied } \Delta/2}$$

Durch Veränderung des Gangunterschieds Δ kann die Amplitude der resultierenden Welle beeinflusst werden. Min./Max. der Amplitude erhält man (wie oben ...)

• **Amplitude = 0** \Rightarrow $2 \cdot \hat{y} \cdot \cos(k \cdot \Delta / 2) = 0$

$$\frac{k \cdot \Delta}{2} = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\pi}{k} = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\pi \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}$$

Destruktive Interferenz: $\Delta = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$

[Gl.4.2.80.]

• **Ampl.-Maximum** $\Rightarrow |\cos(k \cdot \Delta / 2)| = 1$

$$\frac{k \cdot \Delta}{2} = m \cdot \pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta = m \cdot \frac{2\pi}{k} = m \cdot \lambda$$

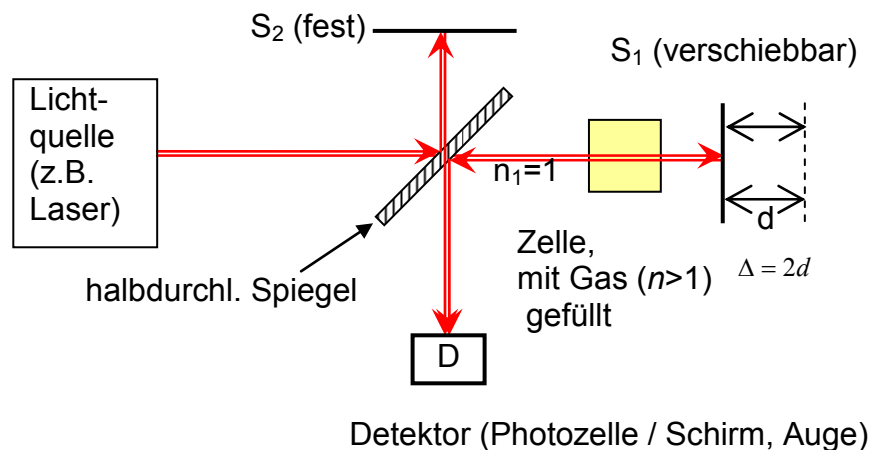
Konstruktive Interferenz $\Delta = m \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$ [Gl.4.2.81.]

Weil bereits durch Veränderung des Gangunterschieds von nur $\frac{1}{2}$ Wellenlänge (bei Licht genügen also ca. 200 nm!) aus einem Minimum ein Maximum wird, kann Interferenz als sehr genaue Meßmethode angewandt werden.

Von den zahlreichen Interferometer-Bauformen soll hier exemplarisch das **Michelson-Interferometer** skizziert werden.

Mit dem Michelson-Interferometer kann die Verschiebung des Spiegels S_1 sehr genau gemessen werden.

Bringt man in einen Arm des Interferometers noch eine Zelle ein (die mit einem Gas gefüllt oder evakuiert werden kann), so ändert sich auch dadurch der optische Weg. Auf diese Weise kann z.B. die Brechzahl von Luft bestimmt werden ($n = 1,000\ 29\dots$).



Gilt auch bei Interferenz der **Energieerhaltungssatz**? ja nein

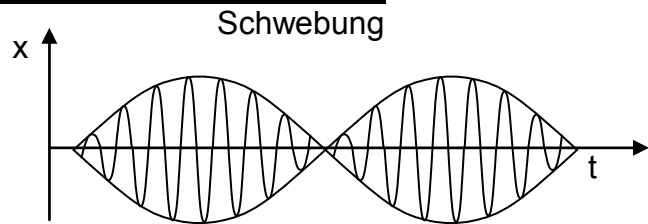
☞ Ein (Michelson-) Interferometer sei so justiert, daß am Ausgang (Detektor D) destruktive Interferenz auftritt. Der Laser (Leistung P) strahlt aber am Eingang laufend Energie in das Gerät ein.

Wo bleibt diese Energie ?

4.2.8 Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz

4.2.8.1 Zwei versch. Frequenzen

Bekannt (hoffentlich!) aus Kap. 4.1.4 :



Die Überlagerung von 2 Schwingungen mit versch. Kreisfrequenz ω_1, ω_2 ergibt eine **Schwebung**, d.h. eine Schwingung, deren Amplitude als Funktion der Zeit periodisch zu- und abnimmt. Die Schwebungsfrequenz ergab sich gerade als Differenz der 2 Frequenzen.

Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich, wenn zwei harmonische Wellen mit unterschiedlicher Frequenz überlagert werden. Jetzt muß aber die Abhängigkeit von t und x beachtet werden, da nicht nur die Frequenz sondern auch die Wellenlänge der zwei Wellen verschieden sind.

Überlagerung von 2 Wellen:

$$y_1 = \hat{y} \cdot e^{j(k_1 \cdot x - \omega_1 \cdot t)}$$

$$y_2 = \hat{y} \cdot e^{j(k_2 \cdot x - \omega_2 \cdot t)}$$

Mit den Abkürzungen

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad k_{1,2} = k \pm \Delta k \quad [\text{Gl.4.2.82.}]$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega_{1,2} = \omega \pm \Delta \omega \quad [\text{Gl.4.2.82.}]$$

läßt sich die Überlagerung schreiben als ...

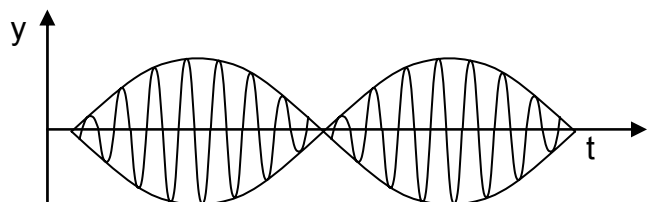
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$y(x, t) = \hat{y} \cdot \left\{ e^{j[(k \cdot x - \omega t) + (\Delta k \cdot x - \Delta \omega t)]} + e^{j[(k \cdot x - \omega t) - (\Delta k \cdot x - \Delta \omega t)]} \right\}$$

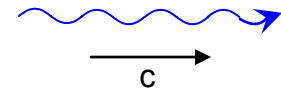
$$y(x, t) = \hat{y} \cdot \underbrace{\left\{ e^{+j(\Delta k \cdot x - \Delta \omega t)} + e^{-j(\Delta k \cdot x - \Delta \omega t)} \right\}}_{= 2 \cdot \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega t)} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)}$$

$$y(x, t) = 2 \cdot \hat{y} \cdot \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t) \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)} \quad [\text{Gl.4.2.83.}]$$

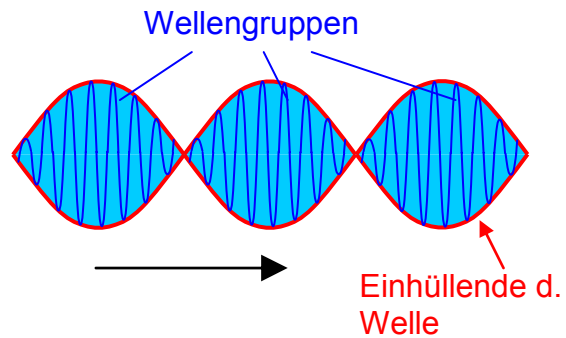
Ähnlich wie bei der Schwebung betrachten wir speziell den Fall, bei dem sich Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k der 2 Wellen nur „wenig“ unterscheiden:
 $\Delta \omega \ll \omega, \Delta k \ll k$



- Der Ausdruck $e^{j(k \cdot x - \omega t)}$ ist eine **Welle** mit dem (mittleren) ω u. k , die sich in x -Richtung ausbreitet.



- Die **Phasengeschwindigkeit** dieser Welle ist $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$ [Gl.4.2.84.]
- Die **Amplitude** dieser Welle ist **moduliert** mit dem Faktor $\cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)$
- Die Welle besteht also aus einzelnen Wellengruppen, die sich ebenfalls in x-Richtung bewegen



4.2.8.2 Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

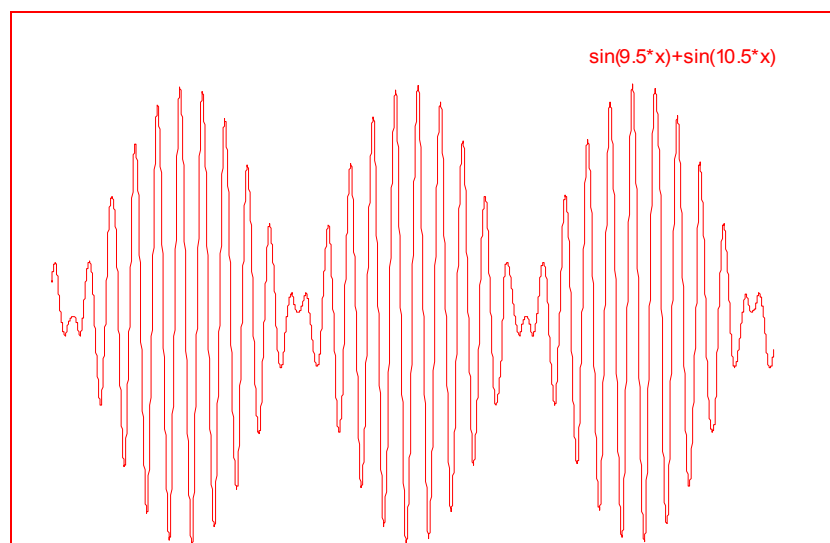
Wir betrachten weiter die Überlagerung von 2 harmonischen Wellen mit unterschiedlicher Wellenlänge. Dabei bilden sich Wellengruppen aus, die durch den Faktor $\cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)$ beschrieben werden. Die Geschwindigkeit, mit der sich diese Einhüllende der Wellengruppe fortbewegt, ist die **Gruppengeschwindigkeit c_{gr}** :

Aus $y \sim \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)$ ergibt sich für irgendeinen Punkt auf der Einhüllenden (z.B. für ein Maximum): $\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t = \text{const.}$

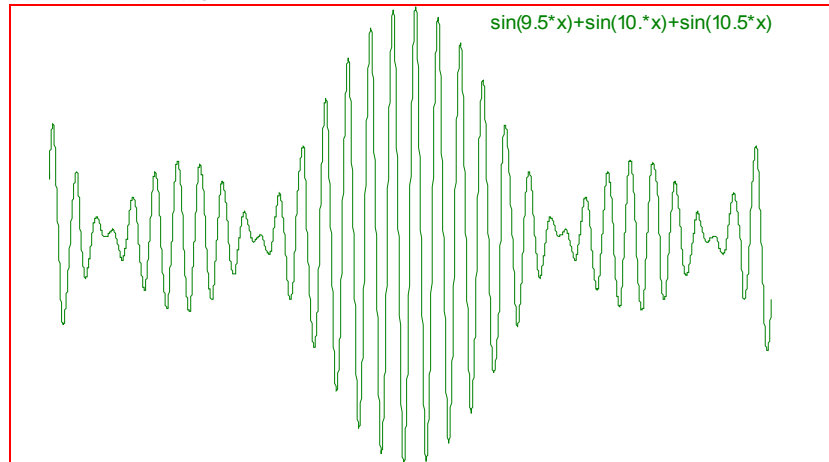
$$c_{gr} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad [\text{Gl.4.2.85.}]$$

Was ergibt sich, wenn 2, 3, 4, ..., „viele“ Wellen überlagert werden ? Auf die ausführliche Rechnung wird hier verzichtet. Einige Beispiele zeigen, welche Wellenformen man erhält, wenn mehrere Wellen mit etwas verschiedenen Wellenlängen überlagert werden:

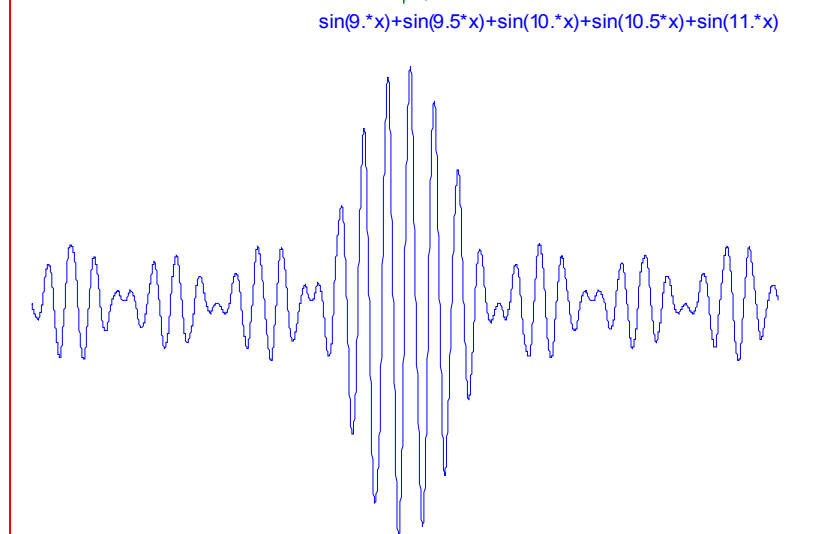
2 Wellen überlagert ...
(gleiche Amplitude)



3 Wellen überlagert ...
(gleiche Amplitude)

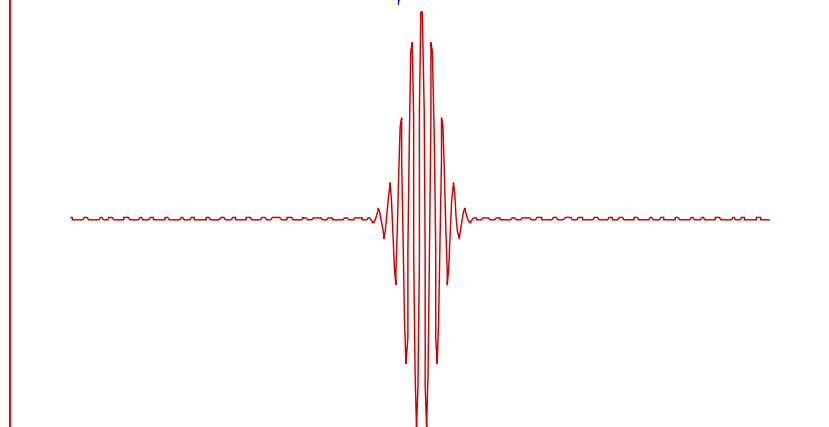


5 Wellen überlagert ...
(gleiche Amplitude)



Wellenpaket. Überlagerung
aus **51** versch. harmonischen
Wellen,

deren Amplitude mit
wachsendem Abstand von der
mittleren Frequenz immer
kleiner wird (\sim
Gaußfunktion)



Mit 2 Wellen erhält man eine „Perlschnur“, die einzelnen Wellenpakete sind alle gleich groß und folgen ohne Abstand aufeinander. Werden mehr und mehr Wellen überlagert, so erhält eine Wellengruppe eine besonders große Amplitude. Dazwischen liegen mehrere kleinere Pakete. Mit entsprechend vielen Einzelwellen kann man erreichen, daß vor und hinter dem „großen“ Paket fast nichts übrigbleibt.

Beachten Sie aber: Alle dargestellten Funktionen sind periodisch. Mit einer endlichen Anzahl von Wellen erhält man immer eine Folge von periodisch auftretenden Paketen. Streng genommen erhält man erst mit unendlich vielen verschiedenen Wellenlängen ein einzelnes Wellenpaket!

Aus der Summe von 2, 3, ... Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen k wird schließlich ein Integral über k :

$$\Rightarrow \int \dots e^{j(k \cdot x - \omega(k) \cdot t)} dk \quad \text{„Fourier-Synthese“}$$

Für jede Wellenart gibt es eine Beziehung zwischen (Kreis-) Frequenz und Wellenlänge bzw. Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$: $\omega = \omega(k)$.

Für die Gruppengeschwindigkeit erhält man dann anstatt $c_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ [Gl.4.2.86.]

<u>Phasengeschwindigkeit</u>	$c = \frac{\omega}{k}$	Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt mit fester Phase (z.B. Nulldurchgang) bewegt
<u>Gruppengeschwindigkeit</u>	$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$	Geschwindigkeit einer Wellengruppe, eines Wellenpakets, Geschwindigkeit, mit der ein aufmoduliertes Signal übertragen wird

Ob die Gruppengeschwindigkeit kleiner, gleich groß oder größer als die Phasengeschwindigkeit ist, hängt von der Wellenart (und vom Medium), d.h. von der Beziehung $\omega = \omega(k)$ ab.

- ① ω proportional zu k :
 $\omega \sim k$

$$\omega = c \cdot k, \quad \text{mit der Phasengeschwindigkeit } c = \frac{\omega}{k}$$

(c ist konstant, d.h.unabhängig von ω und k !)

Wenn c konstant ist, dann ist auch die Gruppengeschwindigkeit $= c$:

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c !$$

- ① Wenn ω proportional zu k ist ...

Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} =$ Phasengeschwindigkeit c

beide sind konstant!

- ② Zwischen ω und k besteht ein nichtlinearer Zusammenhang : $\omega = c(k) \cdot k$
Phasengeschwindigkeit ist dann nicht konstant, sondern hängt von k (bzw. von λ) ab

$$c = c(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$

Mit $c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ und $\omega = c(k) \cdot k$ erhält man für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$= c \cdot 1 + k \cdot \frac{dc}{dk}$$

$$= c + k \cdot \frac{dc}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}, \quad \text{mit } \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}$$

$$= c + \frac{dc}{d\lambda} \cdot \frac{-2\pi}{k}$$

Somit kann, wenn c als Funktion der Wellenlänge bekannt ist, die Gruppengeschwindigkeit berechnet werden:

$$c_{gr} = c - \lambda \cdot \frac{dc}{d\lambda} \quad [\text{Gl.4.2.87.}]$$

Alternativ läßt sich c_{gr} berechnen, wenn c als Funktion der Frequenz gegeben ist:

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{c_{gr}} = \frac{dk}{d\omega}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{dc}{d\omega}$$

$$c_{gr} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \cdot \frac{dc}{d\omega}} \quad [\text{Gl.4.2.88.}]$$

- ② Wenn ω nicht proportional zu k ist,
sind Gruppen- u. Phasengeschw. verschieden
und hängen von der Wellenlänge bzw. Frequenz ab!

Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} \neq$ Phasengeschwindigkeit c

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad \left(\text{bzw.} \quad c_{gr} = c - \lambda \cdot \frac{dc}{d\lambda} \quad \text{oder} \quad c_{gr} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \cdot \frac{dc}{d\omega}} \right)$$

4.2.8.3 Dispersion

Phasengeschwindigkeit c frequenzabhängig \Leftrightarrow **Dispersion**

(in diesem Fall ist $c_{gr} \neq c$!)

Dispersion führt dazu, daß Licht bei der **Brechung** (Kap. 4.2.9.3) je nach Wellenlänge verschieden stark abgelenkt wird („Brechungsdispersion“). „Laufzeitdispersion“ bewirkt, daß Signale, die man einer Welle aufmoduliert hat, ihre Form verändern, da die einzelnen Komponenten unterschiedliche Geschwindigkeit haben (z.B. elektr. Signalübertragung über reale Leitungen oder optische Signalübertragung über Glasfaserkabel).

Einteilung:

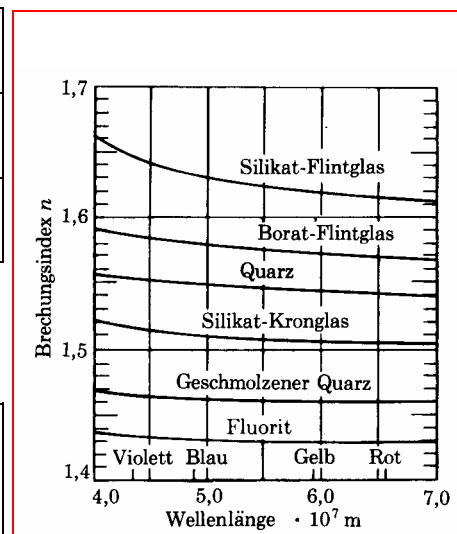
„normale Dispersion“	$\frac{dc}{d\lambda} > 0$	$c_{gr} < c$
„anomale Dispersion“	$\frac{dc}{d\lambda} < 0$	$c_{gr} > c$
keine Dispersion	$\frac{dc}{d\lambda} = 0$	$c_{gr} = c$

Optik: Brechungsindex $n = \frac{c_0}{c}$ [Gl.4.2.89.]

(c : Phasengeschw. im Medium, c_0 : im Vakuum)

Einige Beispiele für „norm. Disp.“ im sichtbaren Bereich

(beachte: $\frac{dc}{d\lambda} > 0 \Leftrightarrow \frac{dn}{d\lambda} < 0$!)

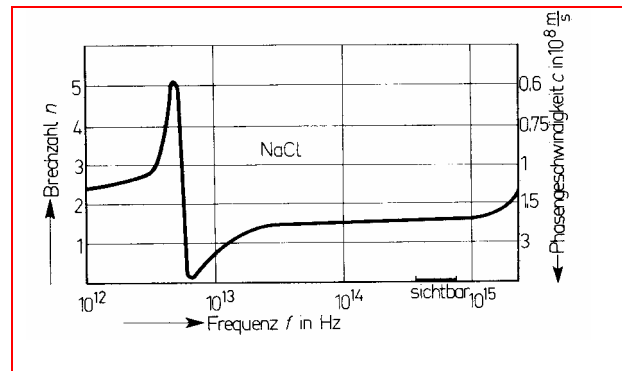


Bsp. Quarzglas $c = \frac{c_0}{n(\lambda)}$

$$\lambda_1 = \underbrace{800 \text{ nm}}_{\text{in Luft!}} \quad c_1 = \frac{c_0}{1,4534} \quad , \quad \lambda_2 = \underbrace{900 \text{ nm}}_{\text{in Luft!}} \quad c_2 = \frac{c_0}{1,4518}$$

☞ Berechnen Sie für Licht der (mittleren) Wellenlänge 850 nm die Gruppen- und die Phasengeschwindigkeit!

Abhängigkeit der Brechzahl bzw. der Phasengeschw. von der Frequenz bei Kochsalz



Was ist die Ursache der Dispersion von Licht in Materie? Warum ist die Phasengeschwindigkeit von Licht in Glas, Wasser, NaCl etc. überhaupt verschieden von der Vakuumlichtgeschwindigkeit und warum hängt dieser Unterschied von der Frequenz ab ?

Eine elektromagnetische Welle, die in Materie eindringt, regt dort die elektrischen Ladungen (Elektronen, Atomkerne) zu erzwungenen Schwingungen an. Dabei gibt es eine (frequenzabhängige !!!) Phasenverschiebung zwischen Erregerkraft und Bewegung der Ladungen (siehe Kap. 4.1.3 !). Die schwingenden Ladungen senden aber ihrerseits wieder elektromagnetische Wellen aus. Diese sind gegenüber der ursprünglichen Welle phasenverschoben und addieren sich mit der ursprünglichen Welle zu einer resultierenden, ebenfalls phasenverschobenen Welle auf. Diese Phasenverschiebung nimmt proportional zur durchlaufenen Schichtdicke zu. Infolgedessen erscheint der ganze (recht komplexe) Ablauf so, als ob die resultierende Welle im Medium eine andere Geschwindigkeit als im Vakuum hätte. Besonders stark ändert sich c und n in der Nähe von Resonanzstellen. Allerdings tritt gerade dort auch starke Dämpfung auf!

4.2.9 Wellenausbreitung in 2 und 3 Dimensionen

Bisher: 1-dimensionale Wellenausbreitung

- Seil, Kabel etc. : Ausbreitungsmedium ist 1-dim. !
- Schall, em-Wellen, Oberflächenwellen in Wasser
... breiten sich im Raum (2-dim.) bzw. in einer Ebene (Wasseroberfl., 2-dim.) aus

aber: 1-dim. Betrachtung genügt(e) zur Beschreibung **ebener Wellen** (Wellenfront ist Ebene / Gerade)

Ausbreitung geradlinig

- x-Richtung (Bsp. Schalldruck)

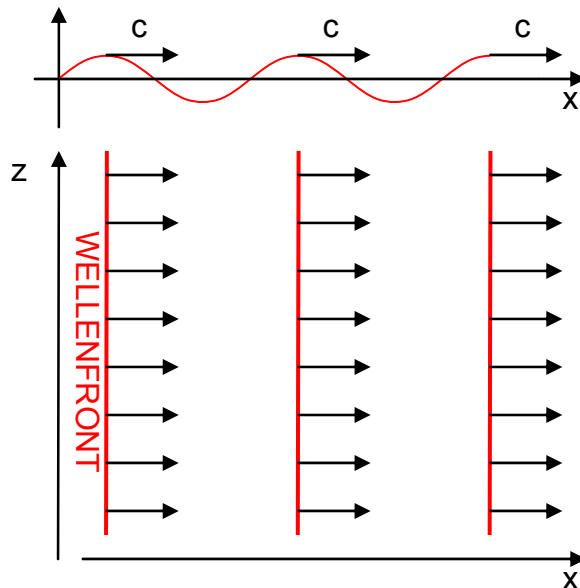
$$p(x, t) = \hat{p} \cdot e^{j(k \cdot x - \omega t)} (+ p_0)$$

- beliebige Richtung (Wellenzahlvektor \vec{k})

$$p(x, y, z, t) = \hat{p} \cdot e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (+ p_0)$$

Ebene Welle :

Schallwechseldruck, E-Feld, ...



Wie kommt es zur Ausbreitung der eindimensionalen bzw. ebenen Welle ?

1-dim. Fall (siehe Bsp. „Pendelkette“, Kap. 4.2.1):

- Welle erreicht einen best. Punkt (*ein Pendel*), versetzt diesen in Schwingung
- Von diesem Punkt geht eine neue Welle aus (*durch Kopplung wird Nachbar in Schwingung versetzt*)

Jeder schwingende „Punkt“ gibt Schwingung an „Nachbarn“ weiter \Rightarrow Wellenausbreitung (*)

Eine **beliebige Welle**, die sich **im 3-dim. Raum** ausbreitet, ergibt sich (*im Prinzip*) als Lösung der 3-dimensionalen d'Alembertschen Wellengleichung:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \text{ Diese Gl. hat (abhängig von}$$

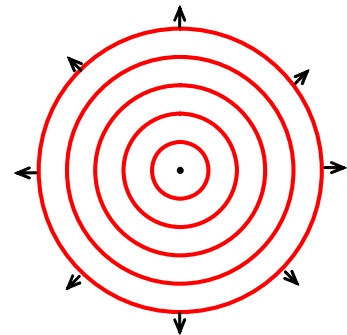
den Randbedingungen) außer den ebenen Wellen noch viele anderen Lösungen. Zum Beispiel gibt es im 2-dim. Fall kreisförmige Wellen (Wasseroberfläche!), im 3-dim. Fall **Kugelwellen**. Bei diesen Wellenformen bleibt im Gegensatz zur ebenen Welle auch ohne Dämpfung die Amplitude nicht konstant, sondern nimmt ab, wenn sich die Welle ausbreitet und dadurch die „Fläche“ vergrößert wird (Energieerhaltung!). Eine

Kugelwelle läßt sich darstellen als $\sim \frac{1}{r} \cdot f(k \cdot (r - ct))$, dabei ist

$f(\dots)$ eine beliebige Funktion. Speziell interessieren auch hier

wieder die harmonischen Funktionen ($\Rightarrow \sim \frac{1}{r} \cdot e^{j(k \cdot (r - ct))}$). Die Kugelwelle breitet sich gleichmäßig (isotrop) in alle Richtungen aus, die Amplitude hängt nur vom Abstand vom Zentrum (Radius r), nicht aber von der Richtung ab.

Mit etwas Mathematik läßt sich zeigen, daß die Kugelwellen tatsächlich Lösungen der 3-dim. Wellengleichung sind (*Anleitung: Polarkoordinaten verwenden, Laplace-Operator in Polarkoordinaten aus Formelsammlung! Beachten, daß Ableitungen nach den Winkeln Null ergeben, da Kugelwelle nicht von Richtung abhängt!*)



4.2.9.1 Huygens-Fresnelsches Prinzip

Nach Christian Huygens (1629 - 1695) und Jean Augustin Fresnel (1788 - 1827) kann die Ausbreitung einer Welle im Raum bestimmt werden, indem man die oben für den eindimensionalen Fall aufgestellte Regel (*) auf den 3-dim. Raum erweitert und beachtet, daß jeder schwingende Punkt im Raum eine neue Kugelwelle („Elementarwelle“) aussendet:

Huygens-Fresnelsches Prinzip:

- Von jedem Punkt des Mediums, der von der Welle erfaßt wird, geht eine **Elementarwelle** aus.
- Die weiterlaufende Welle ist die Resultierende aller Elementarwellen!

Natürlich gilt dies auch für die ebene Welle!

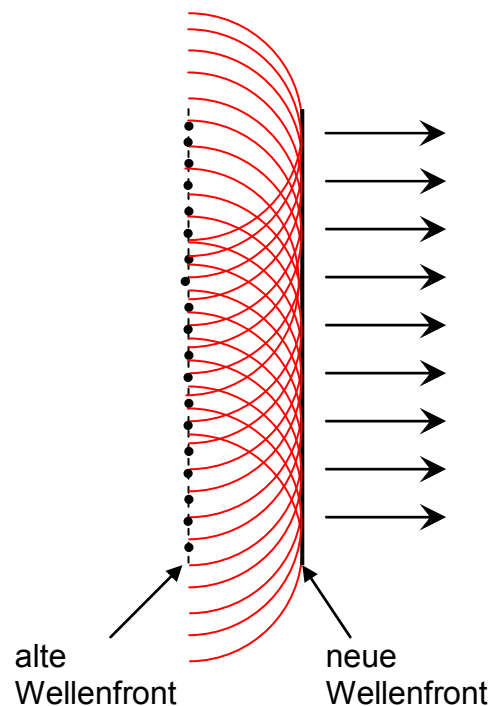
Alle Punkte einer Wellenfläche schwingen mit ...

- gleicher Frequenz (Erregerfrequenz)
- gleicher Phase

und senden deshalb phasengleich Elementarwellen aus. Die Einhüllende dieser Elementarwellen ergibt die neue – ebene – Wellenfront.

Wichtig: Dies funktioniert nur, wenn die Wellenfront unendlich breit ist! Bei einer Welle mit endlicher Breite gibt es Randeffekte, da die seitlich herauslaufenden Elementarwellen nicht durch entsprechende Nachbarn kompensiert werden (siehe auch Kap, 4.2.9.4) !

Damit eine Wellenfront „breit genug“ ist, um von einer sich geradlinig ausbreitenden ebenen Welle zu sprechen, muß die Breite b sehr groß gegenüber der Wellenlänge λ sein. Die gesamte **geometrische Optik** arbeitet mit dieser Näherung der sich geradlinig ausbreitenden **Lichtstrahlen**.



Bsp.: Wie groß ist b/λ für einen „typischen“ Laserstrahl? $b = \dots$, $\lambda = \dots$, $b/\lambda = \dots$

Ausbreitung der ebenen Welle nach Huygens-Fresnel:

Aus ebener Wellenfront entsteht wieder eine ebene Wellenfront !

⇒ geradlinige Ausbreitung der Welle!

Analog kann auch die Ausbreitung einer Kugelwelle durch Überlagerung von Elementarwellen beschrieben werden.

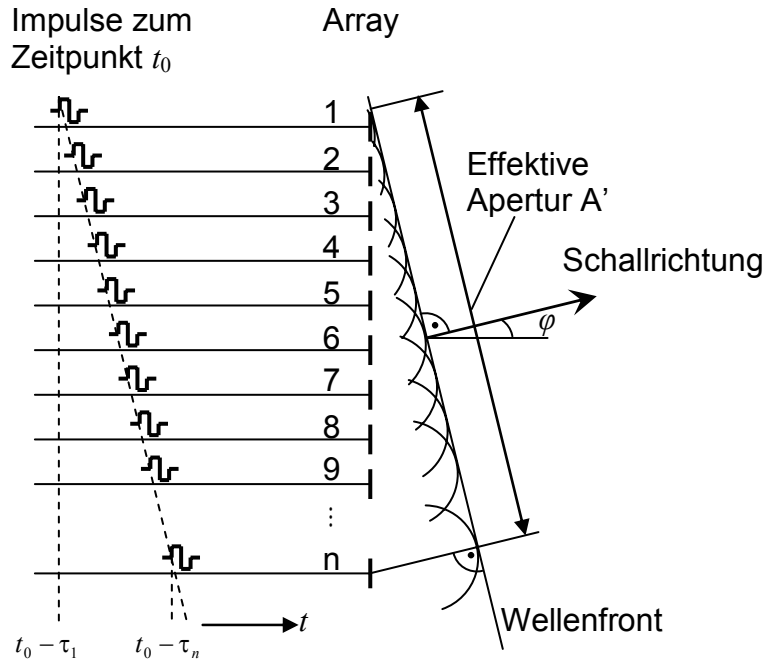
Erreicht die Welle eine reflektierende Grenzfläche, eine Grenze zwischen zwei Medien oder ein Hindernis, so ergibt sich mit Huygens-Fresnel in einfacher Weise **Reflexion**, **Brechung** und **Beugung** (Kap.4.2.9.2.4).

Eine direkte Anwendung des Huygens-Fresnelschen Prinzips ergibt sich in der Ultraschalltechnik. Hier kann man mit einer Reihe zeitversetzt angesteuerter kleiner Schallgeber („Phased-Array“), die jeder eine Elementarwelle aussenden, die Form der Wellenfront in weiten Grenzen beeinflussen:

a)

Ebene Wellenfront wird unter Winkel φ abgestrahlt

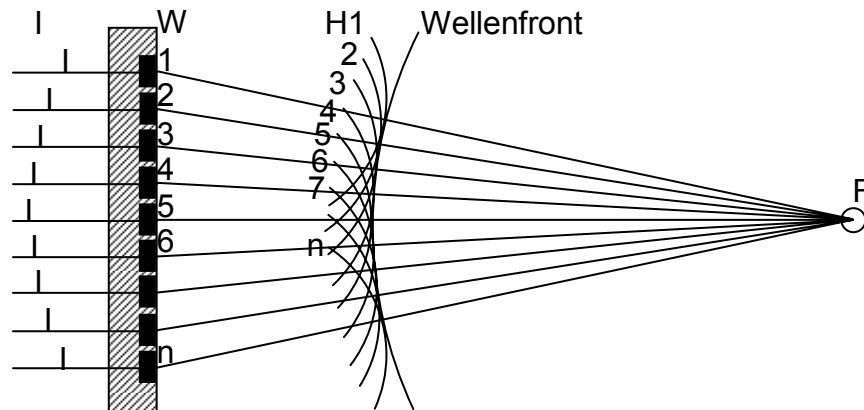
(Lineare Zeitverzögerung der einzelnen Schallgeber)



b)

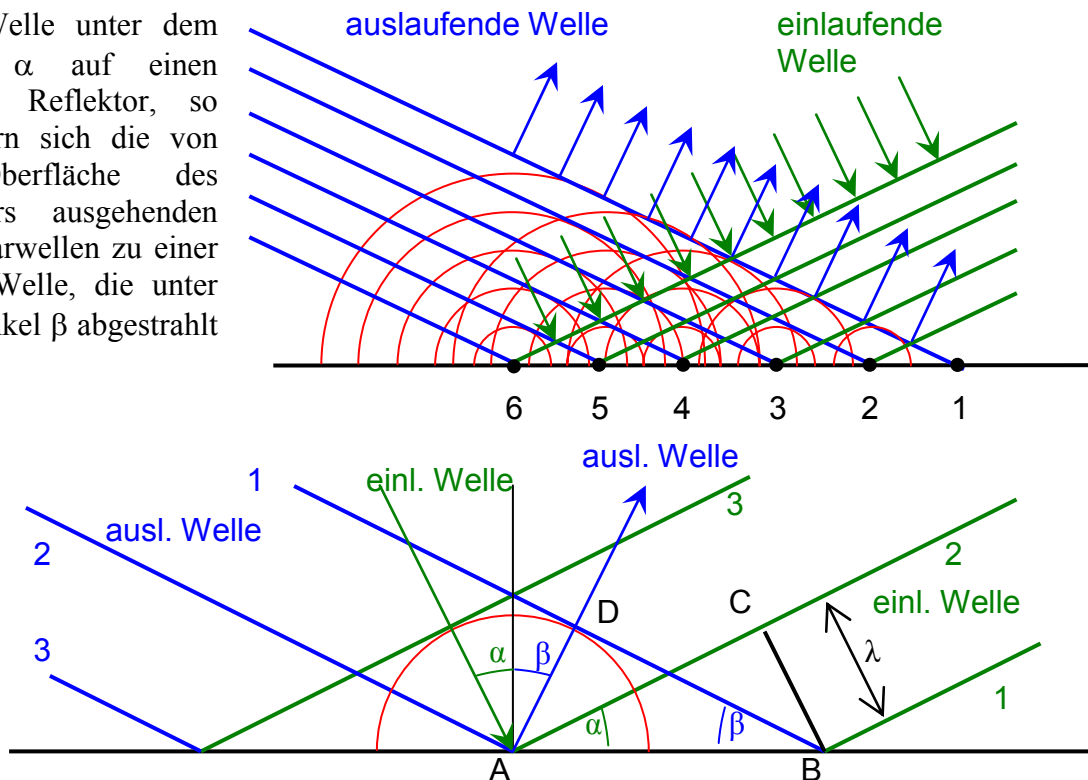
Schallfeld wird auf Punkt F fokussiert

(„Parabel-förmige“ Zeitverzögerung der einzelnen Schallgeber)



4.2.9.2 Reflexion

Aus dem Huygens-Fresnelschen Prinzip ergibt sich auch das Reflexionsgesetz. Trifft eine ebene Welle unter dem Winkel α auf einen (ebenen) Reflektor, so überlagern sich die von der Oberfläche des Reflektors ausgehenden Elementarwellen zu einer ebenen Welle, die unter dem Winkel β abgestrahlt wird.

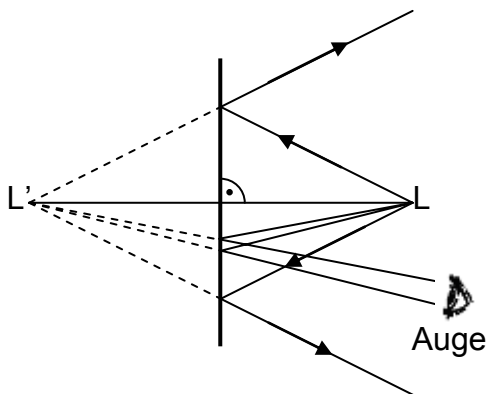


Nach Huygens-Fresnel gilt (s. Skizze, Dreieck ABC und ABD!) :

$$\alpha = \beta$$

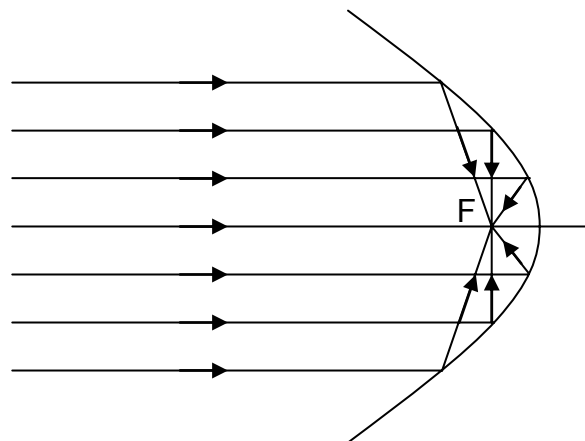
[Gl.4.2.90.]

Ebener Spiegel



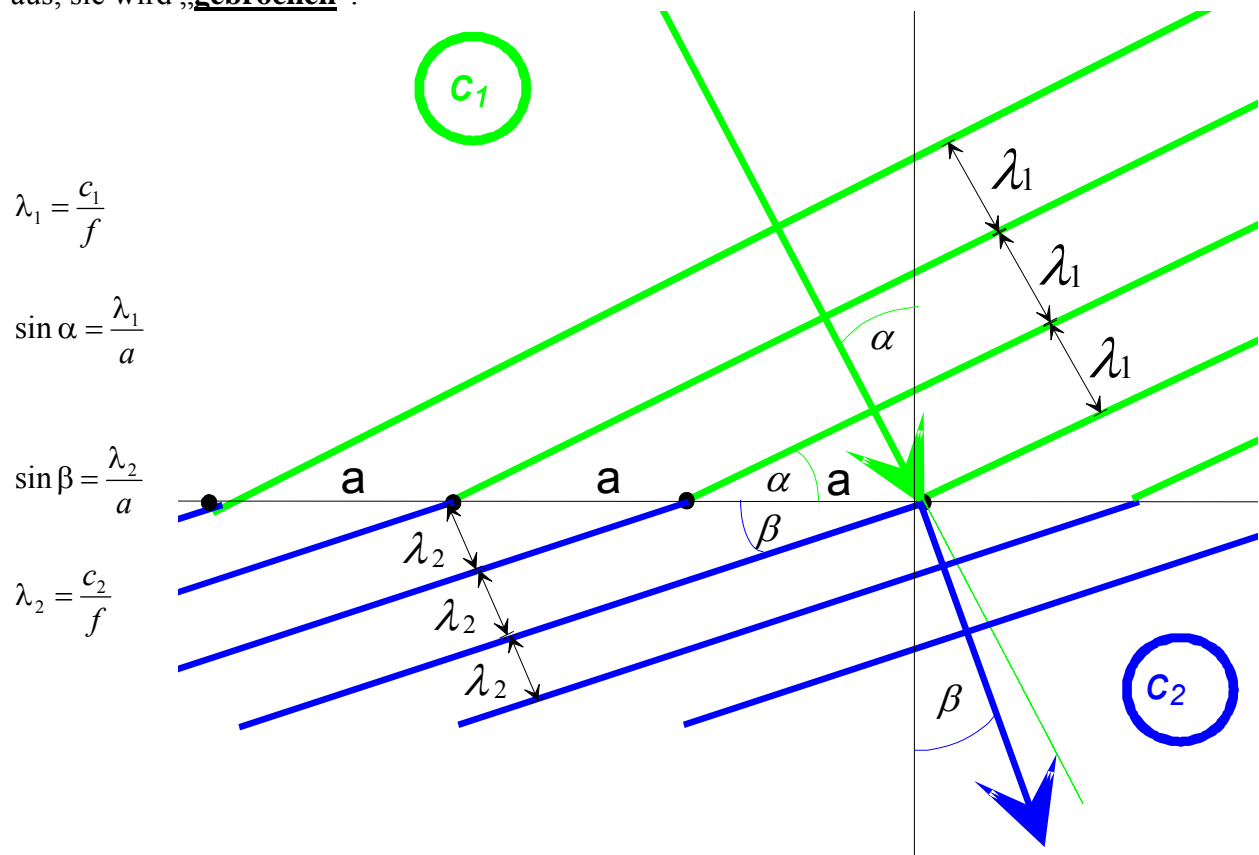
Wie die Skizze zeigt, schneiden sich die von der Lichtquelle L ausgehenden „Strahlen“ nach der Reflexion am Spiegel nicht mehr. Werden die Strahlen aber nach „hinten“ verlängert, erkennt man, daß sie vom Punkt L' zu kommen scheinen. Das Bild L' ist nicht wirklich vorhanden; L' ist ein virtuelles Bild der Lichtquelle L. L' liegt in Bezug auf die Spiegelebene „spiegelsymmetrisch“ zu L.

Der **Parabolspiegel** vereinigt achsenparallele Strahlen im Brennpunkt F



4.2.9.3 Brechung

Trifft eine ebene Welle schräg auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit c_1 , c_2 , so überlagern sich die von der Grenzfläche ausgehenden Elementarwellen (ähnlich wie bei der Reflexion) wieder zu einer ebenen Welle. Wegen der veränderten Geschwindigkeit ist auch die Wellenlänge in den 2 Medien verschieden. Infolgedessen breitet sich die Welle im 2. Medium unter einem anderen Winkel aus, sie wird „**gebrochen**“.



$$\lambda_1 = \frac{c_1}{f}$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_1}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{\lambda_2}{a}$$

$$\lambda_2 = \frac{c_2}{f}$$

Aus der Skizze ergibt sich ...
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Z.B. ist hier $c_2 < c_1$, also auch $\lambda_2 < \lambda_1$ und $\beta < \alpha$, d.h. die Welle wird beim Übergang in ein Medium mit kleinerer Geschwindigkeit zum Lot hin gebrochen!

Das Brechungsgesetz
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad [\text{Gl.4.2.91.}]$$

gilt nicht nur für sichtbares Licht, sondern auch für Mikrowellen, Schall, Ultraschall etc. !

In der Optik ergibt sich die Geschwindigkeit c aus dem Brechungsindex n . Damit erhält man:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1}, c_2 = \frac{c_0}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_0 n_2}{n_1 c_0} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Snelliussches Brechungsgesetz}) \quad [\text{Gl.4.2.92.}]$$

Beachten Sie, dass c bzw. n häufig von der Frequenz abhängen. Infolgedessen wird z.B. Licht von unterschiedlicher Farbe verschieden stark gebrochen (→ Dispersion, Kap. 4.2.8).

Trifft Licht (oder eine andere Welle) auf eine Grenze zu einem (optisch) dünneren Medium, so wird der Strahl vom Lot weg gebrochen:

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

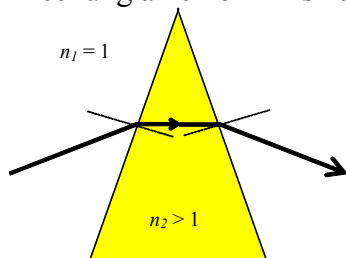
Wegen $n_2 < n_1$ ist jetzt $\beta > \alpha$. β kann aber maximal 90° erreichen ($\sin \beta \leq 1$). Licht tritt dann streifend zur Grenzfläche aus. Für noch größere Einfallswinkel α ist keine Brechung mehr möglich.

$$\sin \alpha > \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \text{Totalreflexion} \quad [\text{Gl.4.2.93.}]$$

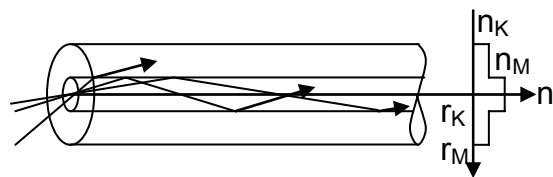
D.h. Licht wird dann an der Grenzfläche vollständig reflektiert!

Anwendungen des Brechungsgesetzes: Linsen, Prismen, eine Vielzahl von opt. Geräten (auf die hier nicht eingegangen werden kann). Einige Beispiele...

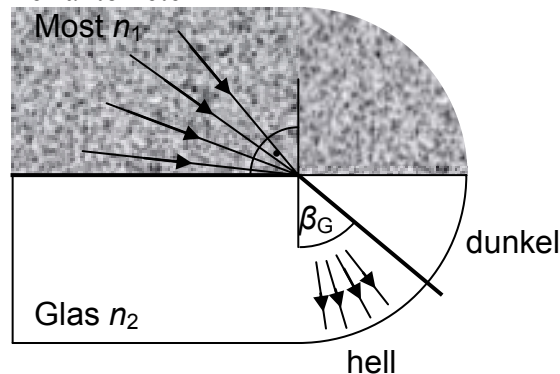
Brechung an einem Prisma



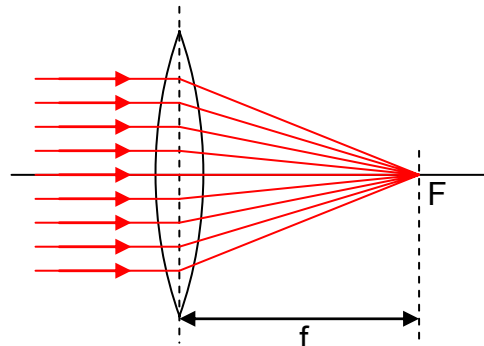
Lichtwellenleiter



Refraktometer



Sammellinse



Brechung und Reflexion

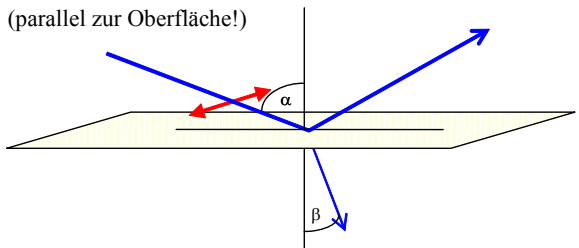
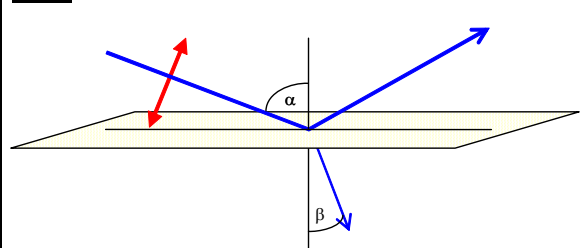
Wie im 1-dim. Fall (bzw. bei senkrechtem Einfall, $\alpha = 0^\circ$, siehe Kap. 4.2.3.2) wird auch bei schrägem Einfall ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil durchgelassen (gebrochen). Der Anteil der reflektierten/gebrochenen Welle ergibt sich auch bei schrägem Einfall wieder aus Energieerhaltung und Stetigkeitsbedingungen.

a) Licht - Fresnelsche Formeln

Beim Durchgang von Licht (em-Welle) durch Grenzflächen muss die Komponente des \vec{E} -Vektors parallel zur Oberfläche stetig sein. Da diese von der **Polarisation** (parallel oder senkrecht zur Einfallsebene) abhängt, werden die Reflexionskoeffizienten polarisationsabhängig! Auch bei schrägem Einfall ist der Wellenwiderstand Z der beiden Materialien wieder wichtig für den Anteil der reflektierten bzw. durchgelassenen Energie. Für Materialien mit $\mu_r = 1$ ist aber $Z \sim 1/n$ (siehe dazu auch Seite 19). Damit hat die Brechzahl n hier doppelte Bedeutung: n beschreibt einerseits die unterschiedliche Geschwindigkeit der

Wellen in den beiden Medien (daraus ergibt sich bei gegebenem Einfallswinkel α der Brechungswinkel β - große Unterschiede in n bedeuten starke Brechung). Andererseits ist an n der Wellenwiderstand gekoppelt und damit wird der Reflexionsgrad beeinflusst (große Unterschiede in n bedeuten starke Reflexion).

Nach etwas Rechnung (die hier übersprungen wird) ergeben sich die „Fresnelschen Formeln“:

$\perp \Leftrightarrow$ Polarisation senkrecht zur Einfallsebene	$\parallel \Leftrightarrow$ Polarisation parallel zur Einfallsebene
<p>E-Feld schwingt senkrecht zur Einfallsebene (parallel zur Oberfläche!)</p> 	<p>E-Feld schwingt in der zur Einfallsebene</p> 
Reflexionskoeffizient für die Amplitude: $r = \frac{E_r}{E_e}$ ($\Leftrightarrow \dots$ für die Intensität: $R = r^2$!)	
$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta}$ $r_{\perp} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$	$r_{\parallel} = -\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta}$ $r_{\parallel} = -\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (6) \quad [\text{Gl.4.2.94.}]$

Dabei kann jeweils der Winkel β aus α mit Hilfe des Brechungsgesetzes $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ berechnet werden..

Die zweite, kompaktere Form der Gleichungen (mit $(\alpha \pm \beta)$) erhält man jeweils, wenn man in der ersten Form n_2/n_1 durch $\sin \alpha / \sin \beta$ ersetzt und dann noch einige trigonometrische Umformungen durchführt. Diese Form ist aber für senkrechten Einfall ($\alpha = 0, \beta = 0$) nicht mehr verwendbar.

Bsp.1: Luft ($n_1 = 1$) \rightarrow Glas ($n_2 = 1.5$) (*Vorzeichenwechsel bei senkrechtem Einfall!*)

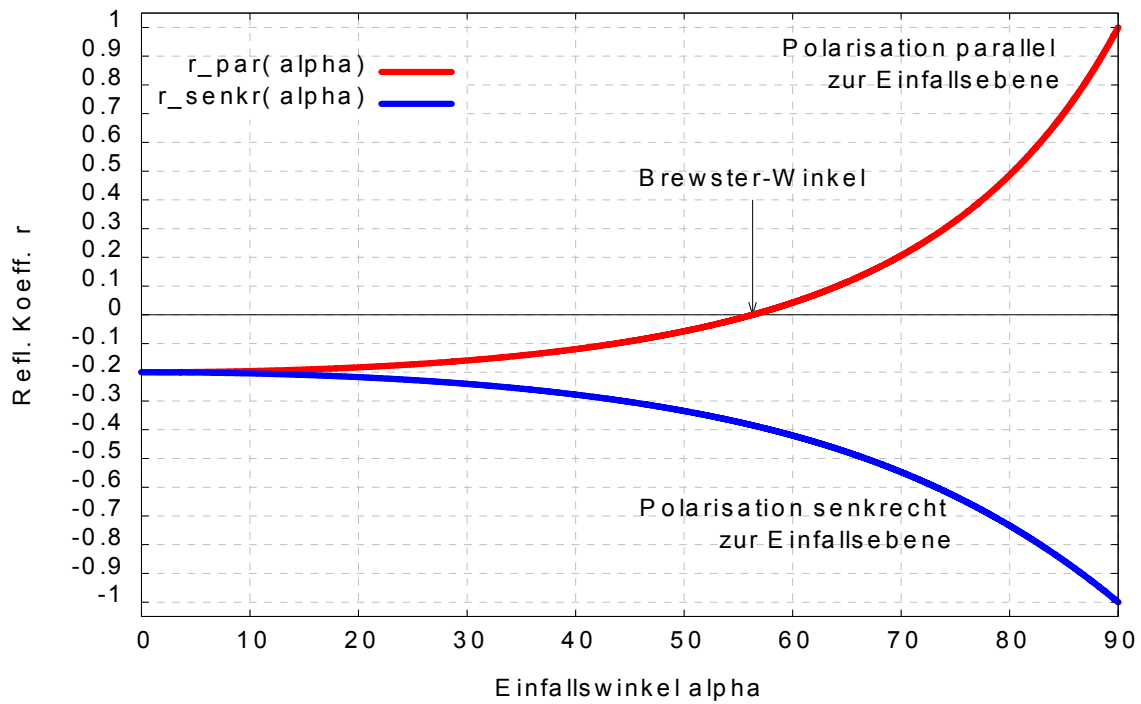
- Bei senkrechtem Einfall ($\alpha = 0^\circ$) sind die 2 Pol.-Richtungen identisch; es werden $R = (-0.2)^2 = 4\%$ der Intensität reflektiert. Es ist $r < 0$ (Refl. am dichteren Medium)!
- Für streifenden Einfall ($\alpha \rightarrow 90^\circ$) geht der Refl.-Koeff. R gegen 100 % !
- Beim „**Brewster-Winkel**“ $\alpha_B = 56.3^\circ$ ($\tan \alpha_B = n_2/n_1$) hat die Kurve $r_{\parallel}(\alpha)$ einen Nulldurchgang! Parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht wird unter diesem Winkel nicht reflektiert! Von unpolarisiertem Licht wird nur die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Komponente reflektiert!

☞ Welcher Winkel liegt in diesem Fall zwischen reflektiertem und gebrochenem Strahl?

.....

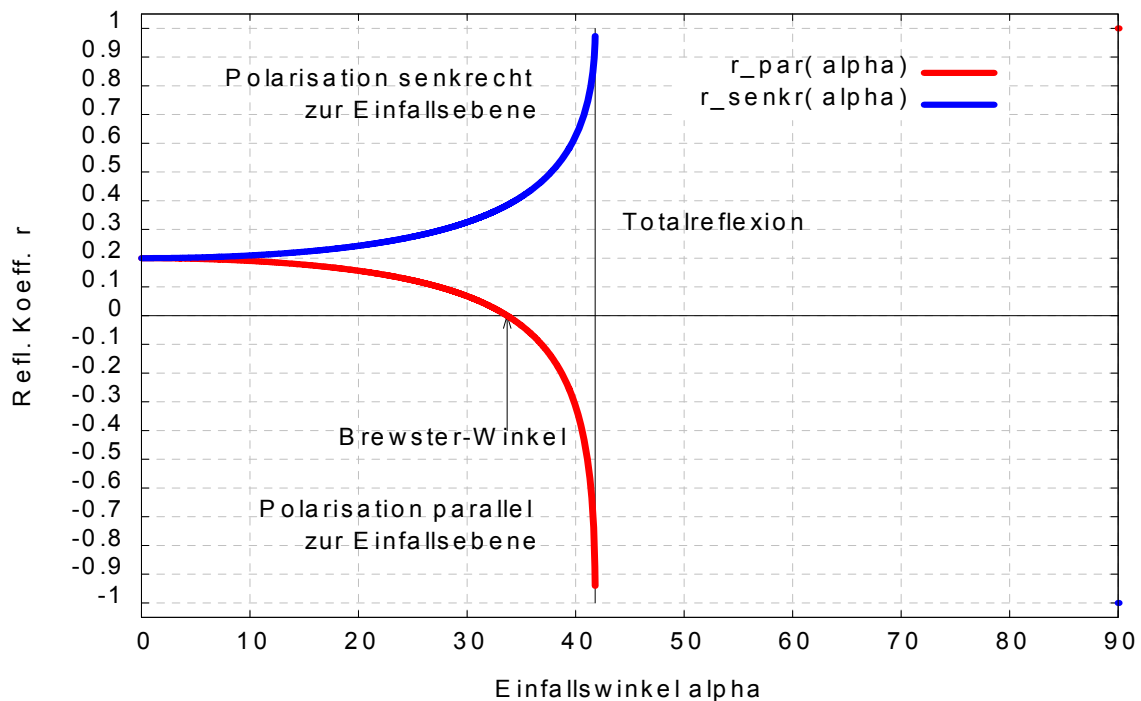
⁶ Achtung: Es gibt in der Literatur verschiedene Vorzeichenkonventionen. Hier wird r so definiert, dass ein negativer Wert einen Phasensprung bei der Reflexion bedeutet und sich bei senkrechtem Einfall für beide Polarisationsrichtungen das gleiche Vorzeichen ergibt!

Fresnelsche Formeln , Luft -> Glas



Bsp.2: Glas ($n_2 = 1.5$) \rightarrow Luft ($n_1 = 1$) (kein Vorzeichenwechsel bei senkrechtem Einfall!
Totalreflexion für $\alpha > 41,8^\circ$)

Fresnelsche Formeln , Glas -> Luft



☞ Berechnen Sie den Brewster-Winkel und den Grenzwinkel für die Totalreflexion!

b) Schall / Ultraschall

Auch beim schrägen Einfall einer Schallwelle auf eine Grenzfläche wird ein Teil der Welle reflektiert, ein anderer Teil dringt ins Medium ein, wird aber gebrochen. Der Reflexionskoeffizient ergibt sich wieder aus der Energieerhaltung und Stetigkeitsbedingungen. Da Schallwellen in Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) Longitudinalwellen sind, müssen wir hier nicht zwischen verschiedenen Polarisationsrichtungen unterscheiden.

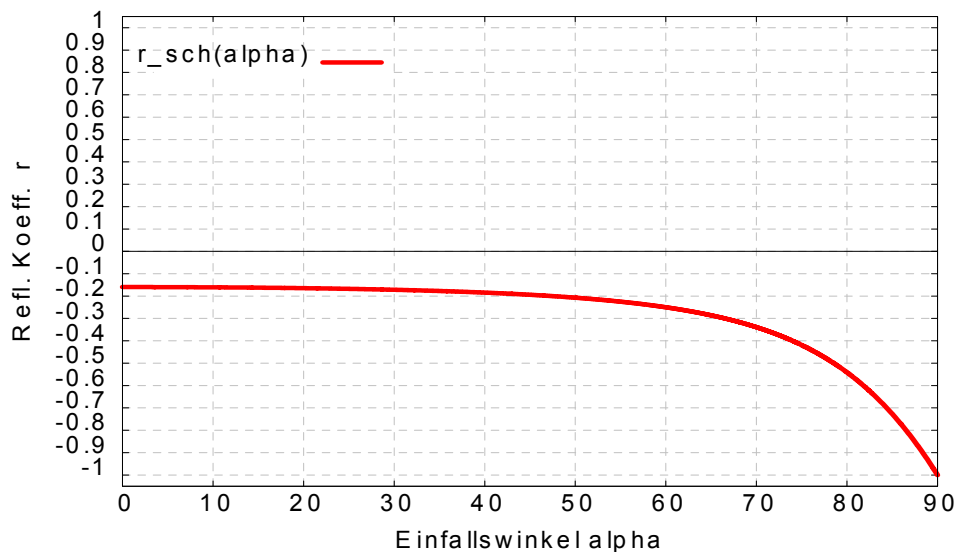
Die Schall-Brechung ergibt sich aus den Schallgeschwindigkeiten in den beiden Medien, $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$. Für den Wellenwiderstand gilt (Gl.4.2.21.) $Z_1 = \rho_1 \cdot c_1$ bzw. $Z_2 = \rho_2 \cdot c_2$. Da die

Dichte der beiden Medien normalerweise verschieden ist, gibt es bei Schall im Gegensatz zu Licht keinen allgemeinen Zusammenhang zwischen Z und c . Man erhält ...

Reflexionskoeffizient für Schall:
$$r = \frac{Z_2 \cos \alpha - Z_1 \cos \beta}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \beta} \quad [\text{Gl.4.2.95.}]$$

Beispiel: Übergang von Muskel zu Fettgewebe, $\rho_1 = 1170 \text{ kg/m}^3$, $c_1 = 1570 \text{ m/s}$
 $\rho_2 = 921 \text{ kg/m}^3$, $c_2 = 1445 \text{ m/s}$

Reflexion und Brechung bei Schall



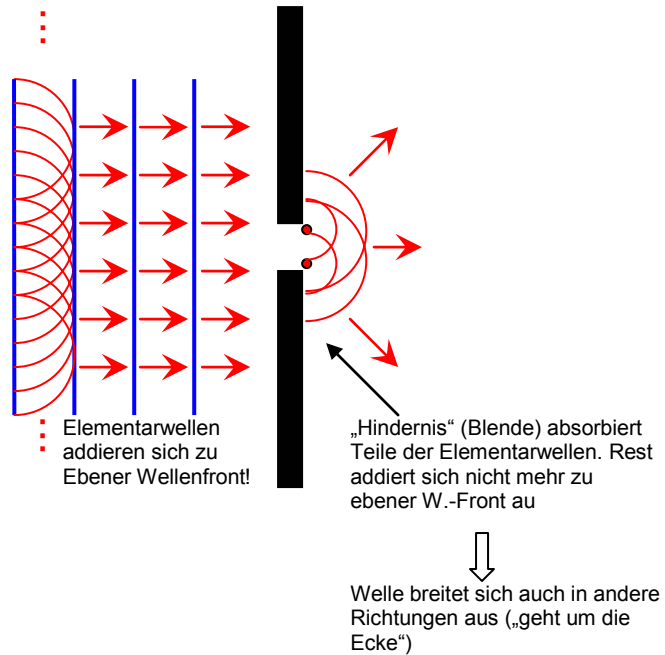
4.2.9.4 Beugung

Trifft eine ebene Welle auf ein Hindernis (z.B. eine Blende), so werden die Elementarwellen zum Teil absorbiert. Infolgedessen können sich die verbleibenden Elementarwellen hinter der Blende nicht mehr zu einer ebenen Welle aufaddieren.

Hinter der Blende breiten sich Wellen in andere Richtungen aus \Rightarrow **BEUGUNG!**

Die bei der Beugung auftretenden Winkel sind von der Größenordnung $\frac{\lambda}{b}$

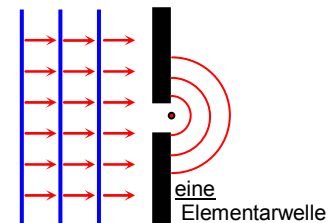
(b : Breite der Blende). Bei Schall treten auf Grund der großen Wellenlänge ($\approx m$) große Winkel auf (wir können „um die Ecke hören“). Bei sichtbarem Licht sind die Beugungswinkel meist sehr klein. Dies ist allerdings lediglich eine Frage der Größe der Hindernisse und der Wellenlänge. Auch Licht wird (an kleinen Strukturen) gebeugt. Im Gegensatz zu Schall (Wellenlänge $\approx m$) breitet sich Ultraschall überwiegend geradlinig aus („Ultraschall-Strahl“).



Durch Beugungseffekte wird das Auflösungsvermögen optischer Apparate (Mikroskop, Teleskop ...) begrenzt. Auch die Breite der Ultraschall-Keule eines Ultraschallgebers ist durch die Beugung gegeben!

a) (Idealer, sehr dünner) Spalt

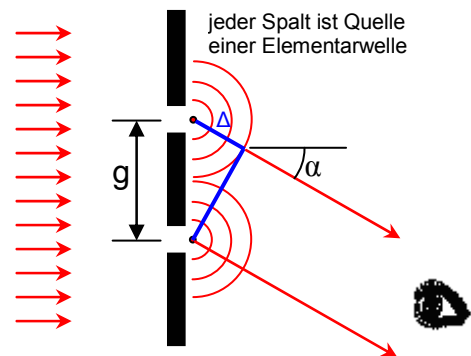
Ein (∞ -) dünner Spalt (bzw. eine sehr kleine, „punktförmige“) Blende läßt nur „eine einzige“ Elementarwelle durch. Hinter dem Spalt breitet diese Elementarwelle (unter allen Winkel) aus.



b) (Idealer) Doppelspalt

Bei einem Doppelspalt aus zwei (∞ -) **dünnen** Spalten (Abstand g) überlagern sich die zwei Elementarwellen und interferieren. Für einen weit entfernten Beobachter unter dem Winkel α haben die 2 Wellen den Gangunterschied Δ .

Es ist $\frac{\Delta}{g} = \sin(\alpha)$. Damit erhält man für ein ...



Interferenz- Maximum (konstr. Interf.)	$\Delta = m \cdot \lambda$ $m = 0, 1, 2 \dots$, $\sin(\alpha) = \frac{m \cdot \lambda}{g}$	[Gl.4.2.96.]
Interferenz- Minimum (destr. Interf.)	$\Delta = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, $\sin(\alpha) = \frac{2m + 1}{2} \cdot \frac{\lambda}{g}$	[Gl.4.2.97.]

	$m = 0, 1, 2 \dots$	
--	---------------------	--

c) Spalt (Breite b)

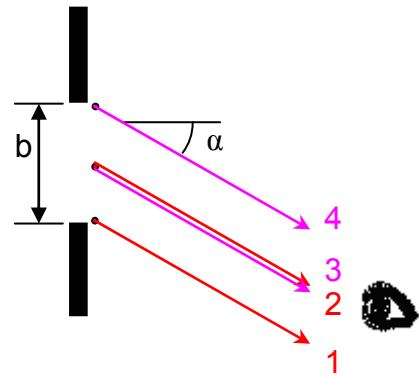
Die Winkel, bei denen **destruktive Interferenz** („Minima“) auftreten, erhält man, wenn sich alle vom Spalt ausgehenden Elementarwellen paarweise wegheben. Dazu teilt man den Spalt in Gedanken zunächst in 2 Teile:

Welle ① + ② \Rightarrow „0“

⋮

Welle ③ + ④ \Rightarrow „0“

... alle anderen (Abstand $\frac{b}{2}$) ergeben ebenfalls „0“!



Der Gangunterschied zwischen Welle ① u. ②, ③ u. ④, ... ist $\Delta = \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha_1$.

Das erste Minimum ergibt sich bei $\Delta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha_1 = 1 \cdot \frac{\lambda}{b}$

Teil man den Spalt in 4 Teile (jeweils $b/4$) ... $\Delta = \frac{b}{4} \cdot \sin \alpha_2 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha_2 = 2 \cdot \frac{\lambda}{b}$

... 6 Teile (jeweils $b/6$) ... $\Delta = \frac{b}{6} \cdot \sin \alpha_3 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha_3 = 3 \cdot \frac{\lambda}{b}$

Minimum Nr. m ($m = 1, 2, 3, \dots$) bei

$\sin \alpha_m = m \cdot \frac{\lambda}{b}$

[Gl.4.2.98.]

Konstruktive Interferenz („Maxima“) erhält man ...

a) näherungsweise (!) in der Mitte zwischen 2 Minima, also bei $\sin \alpha_{Max} \approx \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{b}$

b) in „Vorwärtsrichtung“, d.h. bei $\alpha = 0^\circ$!

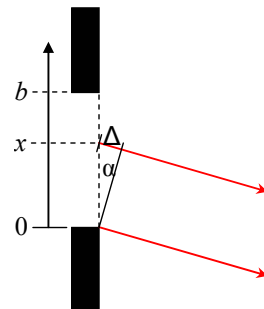
Zur Berechnung der **Intensitätsverteilung** zerlegt man den Spalt in unendlich viele infinitesimale Teile und addiert (\rightarrow integriert) die Amplituden dieser Wellen:

Ampl. (E -Feld) der im inf. Intervall $(x, x + dx)$ ausges. Welle:

$$dE = C \cdot e^{jk\Delta(x,\alpha)} \cdot dx$$

Dabei ist „ C “ eine Konstante (unabh. von x und α).

Der Gangunterschied Δ hängt von x und α ab: $\Delta = \sin \alpha \cdot x$



Die res. Amplitude ergibt sich durch Integration über die Spaltbreite:

$$\hat{E}(\alpha) = \int_0^b C \cdot e^{jk \sin \alpha \cdot x} dx$$

$$\hat{E}(\alpha) = \frac{C}{jk \sin \alpha} \cdot [e^{jk \sin \alpha \cdot b} - 1]$$

Die Intensität erhält man aus dem Betragsquadrat der resultierenden Amplitude:

$$I(\alpha) = |\hat{E}(\alpha)|^2 = \frac{C^2}{k^2 \sin^2 \alpha} \cdot \underbrace{\left| e^{j \sin \alpha \cdot kb} - 1 \right|^2}_{=4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot kb \right)}$$

$$I(\alpha) = C^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} kb \cdot \sin \alpha \right)}{\left(\frac{1}{2} kb \cdot \sin \alpha \right)^2}$$

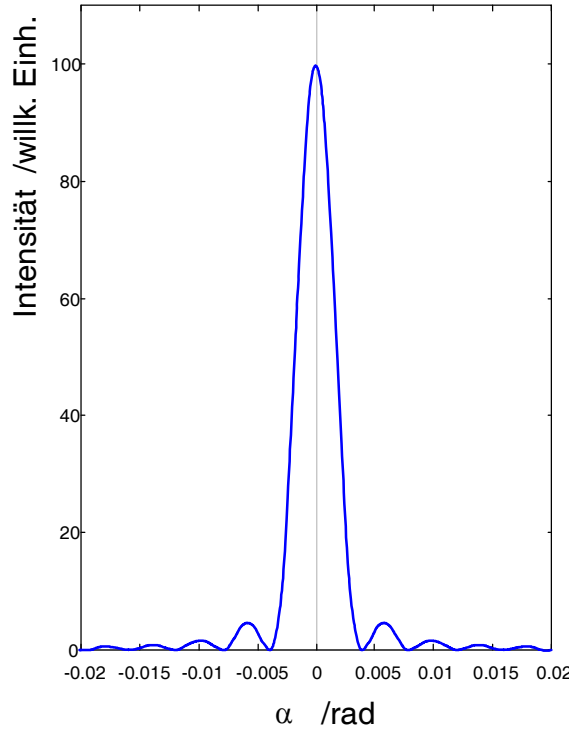
Mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $I_0 =$ Intensität bei $\alpha=0$:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin \left(\pi \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right)} \right]^2$$

Mit der Abkürzung $\eta = \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \alpha$ wird dies

etwas übersichtlicher: $I(\alpha) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta} \right]^2$.
[Gl.4.2.99.]

Beugung am Spalt
($b = 0.1 \text{ mm}$, $\lambda = 400 \text{ nm}$)



- Minima (aus $\sin(\pi\eta) = 0$) bei $\eta_{Min} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (wie oben!)
- Maxima (1. Abl. = 0 setzen ...!) bei $\eta_{Max} = \pm 1.43, \pm 2.46, \pm 3.47, \pm 4.48, \dots$
sowie bei $\eta = 0$ das zentrale Maximum
(die oben verwendete Näherung entspricht $\eta_{Max} \approx \pm 1.5, \pm 2.5, \dots$)

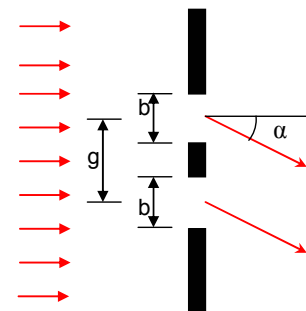
d) Doppelspalt

Eine ähnliche Rechnung ergibt für die Intensitätsverteilung beim Doppelspalt (Mittenabstand g , Spaltbreite b , es ist stets $g > b$!):

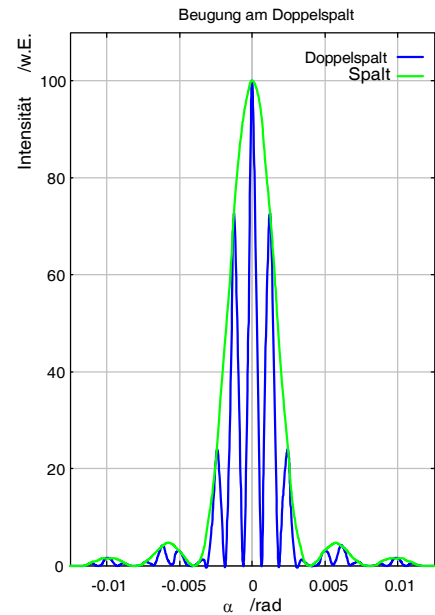
$$I(\alpha)/I_0 = \underbrace{\left[\frac{\sin \left(\pi \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right)} \right]^2}_{\text{Einzelspaltfunktion}} \cdot \underbrace{\left[\cos \left(\pi \frac{g}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right) \right]^2}_{\text{Interferenzfunktion}}$$

(I_0 : Intensität bei $\alpha=0$)

[Gl.4.2.100.]



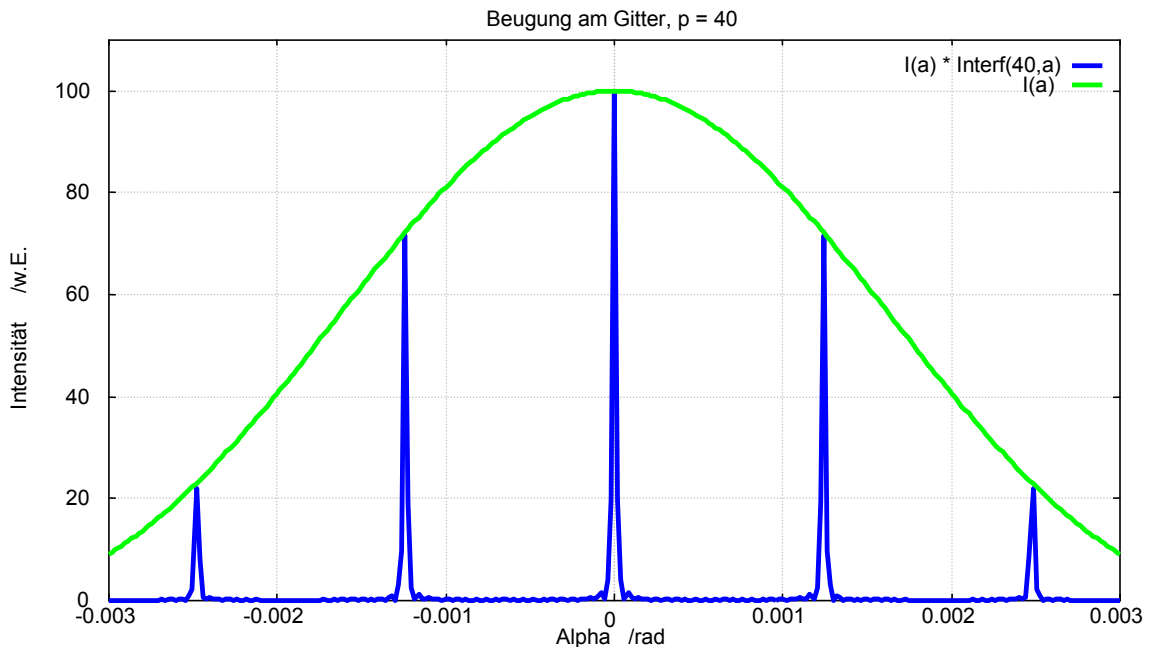
Der erste Faktor stellt die Intensitätsverteilung des Einzelspalts mit Spaltbreite b dar. Der zweite Faktor ergibt sich aus der Interferenz zwischen den von den beiden Spalten ausgehenden Wellen. Er variiert schneller als der erste Faktor (wegen $g > b$). Die Einzelspaltfunktion ist also die Einhüllende der schnell variierenden Interferenzfunktion!



Beugung am Doppelspalt
($b = 0.1 \text{ mm}$, $g = 0.323 \text{ mm}$, $\lambda = 400 \text{ nm}$)

e) Gitter

Wird die Zahl p der Spalte („Strichzahl“) weiter erhöht, so treten in der Interferenzfunktion (große) Haupt- und (kleine) Nebenmaxima auf. Mit zunehmender Anzahl p werden die Nebenmaxima immer kleiner, die Hauptmaxima immer schärfer und höher (siehe dazu Gnuplot-Datei `spalt.plt!`). Im Bereich des Hauptmaximums der einhüllenden Spaltfunktion treten dann mehrere weit getrennte Linien auf.



Die Maxima des Gitters erhält man, wenn der Gangunterschied zwischen benachbarten Wellen ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt (vergl. b), „idealer Doppelspalt“):

$$\Delta = m \cdot \lambda, \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad \sin(\alpha_{Max}) = \frac{m \cdot \lambda}{g}$$

Da die Position der Maxima von der Wellenlänge abhängt und diese Maxima (bei großer Strichzahl p) sehr schmal werden, eignen sich Gitter hervorragend dazu, Licht in seine Farben zu zerlegen und präzise Wellenlängenmessungen zu machen.