

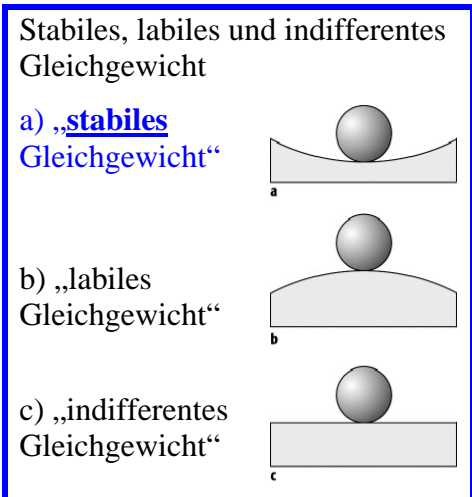
4. Schwingungen und Wellen

Periodische Vorgänge, *Schwingungen und Wellen* spielen – erwünscht oder unerwünscht – bei vielen physikalisch-technischen (aber auch z.B. biologischen) Systemen eine große Rolle. Bei einem neuen Autotyp brach z.B. der Auspuff regelmäßig an einer bestimmten Stelle. Es stellte sich heraus, dass sich eine „stehende Welle“ ausbildete und an der kritischer Stelle gerade ein „Schwingungsbauch“ lag! Bekannt ist auch das Beispiel einer Brücke, die in Resonanz gerät und einstürzt. Ein großer Teil der Elektrotechnik, Messtechnik, Nachrichtentechnik, Signalverarbeitung (auch Biosignalverarbeitung) befasst sich mit (elektromagnetischen) Schwingungen und Wellen. Mechanische und elektrische Schwingungen/Wellen haben sehr viele Gemeinsamkeiten und werden deshalb in diesem Kapitel zusammen behandelt.

Schwingungen

Damit ein physikalisches System Schwingungen ausführen kann, müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein. Diese lassen sich am einfachsten an mechanischen Beispielen verstehen:

- Das System muss eine **Gleichgewichtslage** besitzen.
Dies bedeutet, dass sich in einer Lage sämtliche Kräfte gegeneinander weg heben, das System also in dieser Gleichgewichtslage in Ruhe verharren kann.
- Das System muss nun durch eine äußere Einwirkung („**Störung**“) aus dieser Gleichgewichtslage ausgelenkt werden.
- Es muss eine **Rückstellkraft** geben, die das System bei einer Auslenkung zur Rückkehr in Richtung zur Gleichgewichtslage zwingt.



⇒ Dies bedeutet, dass es sich um ein **stabiles Gleichgewicht** handelt

- Das System muss eine **Trägheit** besitzen, die bewirkt, dass das System bei der Rückkehr zur Gleichgewichtslage nicht dort stehen bleibt, sondern sich über die Gleichgewichtslage hinaus bewegt.

Durch das Zusammenspiel von Rückstellkraft und Trägheit kommt es zu einer periodischen Bewegung, bei der das System immer wieder von einer Seite auf die andere Seite der Gleichgewichtslage wechselt. Die „Lage“ des Systems ist eine Funktion der **Zeit**.

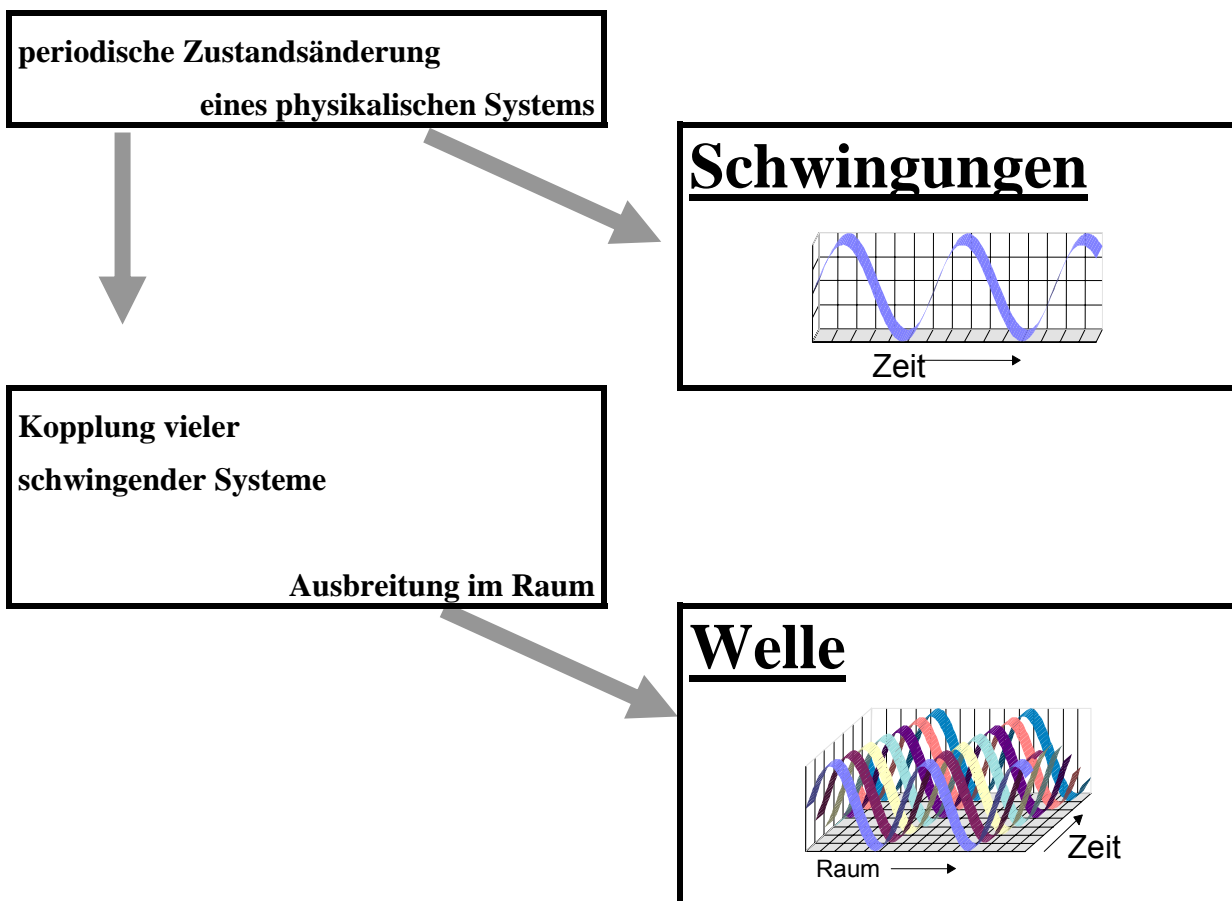
Sensoren, Messgeräte, Positioniersysteme, Messverstärker, Lautsprecher ..., aber auch die Stimmbänder oder das Trommelfell sind Beispiele schwingungsfähiger Systeme, da sie eine Gleichgewichts-„lage“ haben, bei Störungen durch eine „Rückstellkraft“ zurückbewegt werden und immer auch eine gewisse Trägheit aufweisen. Im Kapitel 4.1.3 werden wir behandeln, wie solche Systeme auf äußere Kräfte reagieren.

Charakteristisch für Schwingungen (und Wellen) ist auch, dass **mehrere Energieformen** auftreten und die Gesamtenergie des Systems zwischen diesen Energieformen hin und her pendelt.

- Wenn ein Körper gegen eine „Rückstellkraft“ aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, dann muss Arbeit verrichtet werden. Das System erhält dadurch **potentielle Energie**.
- Wenn sich ein Körper mit Masse (Trägheit!) bewegt, dann besitzt er **kinetische Energie**.

Bei einer mechanischen Schwingung wird also die Energie immer wieder von **potentieller Energie** in **kinetische Energie** und wieder zurück verwandelt. Bei einem elektrischen Schwingkreis steckt die Energie einmal im elektrischen Feld (Kondensator) und einmal im magnetischen Feld (Spule).

In den meisten Fällen sind Schwingungsvorgänge **gedämpft**, d.h. bei jeder Schwingung wird ein gewisser Anteil der Energie des Systems „dissipiert“, d.h. irreversibel in nicht mehr nutzbare Energieformen (typisch: Wärme) umgewandelt. Auf Grund der Dämpfung wird die Schwingung dann abklingen sofern nicht ständig von außen Energie nachgeliefert wird (erzwungene Schwingung, Rückkopplung).



Wellen

Eine Welle entsteht, wenn sich eine solche Störung (Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage) im Raum ausbreiten kann. Diese Ausbreitung einer Störung im Raum wird ermöglicht durch die Kopplung mehrerer (*vieler, ... unendlich vieler*) schwingungsfähiger Systeme. Die Störung wird sozusagen von einem System auf den Nachbarn weitergegeben. Die Störung kann dabei eine einzelne oder aber eine periodische Auslenkung sein. Die „Auslenkung“ ist jetzt also eine Funktion von **Raum und Zeit!**

Da bereits Schwingungen mit Energieumwandlungen verbunden sind transportieren Wellen Energie

Beispiele für Wellen:

- Wasserwellen. (Oberflächenwellen), Druckwellen in Leitungssystemen, ...
- Schall, Ultraschall, Stoßwellen,
- Seismische Wellen, hervorgerufen durch Erdbeben
- Elektromagnetische Wellen (Radio, TV, Telekommunikation, Radar, Licht, Röntgen- und γ -„Strahlung“...),
- Signalausbreitung in Kabeln
- Materiewellen (Elektronen, Neutronen ... – die gesamte Quantenphysik ist Physik der Materiewellen!)

4.1 Schwingungen

Wir behandeln zunächst die so genannten „**freien Schwingungen**“, d.h. wir stellen die Frage, wie sich ein schwingungsfähiges System („**Oszillator**“) verhält, wenn es einmal aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wurde, dann aber sich selbst überlassen ist. In Kapitel 4.1.1 werden ungedämpfte, in 4.1.2 gedämpfte Oszillatoren betrachtet. Im Kapitel 4.1.3 werden dann die „**erzwungenen Schwingungen**“ behandelt: Wie reagiert ein Oszillator, der von außen durch eine (periodische) Kraft angetrieben wird?

4.1.1 Der harmonische Oszillator

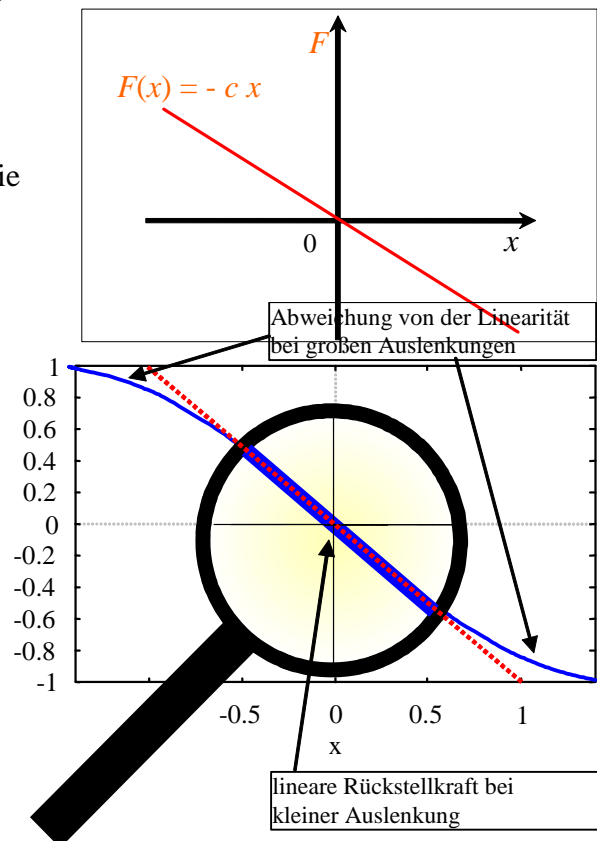
(„freie ungedämpfte Schwingungen“)

Wir betrachten zunächst ein mechanisches Beispiel: die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer **linearen Rückstellkraft**.

In der Gleichgewichtslage ist die Rückstellkraft Null, wir legen der Einfachheit halber an diese Position den Nullpunkt der x-Achse. Da wir eine **Rückstellkraft** haben, muss für $x > 0$ die Kraft auf den Körper negativ sein (zum Ursprung hin). Bei $x < 0$ dagegen ist die Kraft positiv und wirkt damit ebenfalls in Richtung zum Ursprung hin.

In vielen Fällen gibt es jedoch Abweichungen von der streng linearen Kraftkennlinie.

Wenn das System eine stabile Gleichgewichtslage besitzt, dann muss die Kraft als Funktion der Auslenkung x einen Nulldurchgang aufweisen. Wenn $F(x)$ dann noch eine „stetig differenzierbare Funktion“ ist, dann lässt sich $F(x)$ zumindest in der Umgebung des Nulldurchgangs durch eine Gerade annähern. Wir haben dann eine **näherungsweise lineare Rückstellkraft**.



Beispiel 1

• Masse - Feder - Schwinger

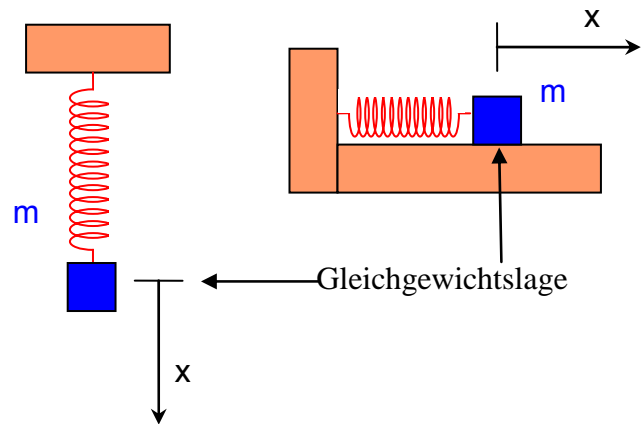
Die Federkraft ist (in gewissen Grenzen) linear (Hookesches Gesetz!)

$$F(x) = -cx$$

$$F < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$F = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (Gleichgewicht)}$$

$$F > 0 \Leftrightarrow x < 0$$



Beachten Sie: Im linken Fall (senkrechte Anordnung) wird die Feder durch die konstante Gewichtskraft der daran hängenden Masse m vorgespannt. In der Gleichgewichtslage heben sich die Gewichtskraft (Richtung: nach unten) und die Federkraft (Richtung: nach oben) gegenseitig weg. Die Gewichtskraft bewirkt als lediglich eine Verschiebung der Gleichgewichtslage, sie ändert nichts an der Steigung ($-c$) der Kraftkennlinie. Legen wir den Ursprung der x -Achse jeweils in die Gleichgewichtslage, dann gilt sowohl für senkrechte wie für waagerechte Anordnung für die resultierende Kraft auf die Masse m :

$$F(x) = -cx \quad \text{[Gl.4.1.1.]}$$

Wir wenden auf dieses System das **II. Newtonsche Gesetz** ($F = ma$) an:

Mit der Kraft $F(x) = -cx$ und der Beschleunigung $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ erhalten wir eine

Differentialgleichung (DGL.) für $x(t)$ ¹ $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$,

oder, etwas umgeformt $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{c}{m} \cdot x$ bzw. $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$

Man bezeichnet eine lineare homogene DGL. dieser Form auch als ...

$$\text{DGL. des harmonischen Oszillators: } \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot x(t) = 0 \quad \text{[Gl.4.1.2.]}$$

Diese Gleichung beschreibt die Dynamik des Systems; die Lösung $x(t)$ dieser Gleichung gibt uns die gesuchte Bewegung des Körpers als Funktion der Zeit.

Eine (uninteressante) Lösung dieser Gleichung (die „triviale“ Lösung) können wir sofort angeben. Da das System eine stabile Gleichgewichtslage bei $x=0$ besitzt kann es natürlich dort liegen bleiben. Das bedeutet, wenn zu irgend einem Zeitpunkt Auslenkung x und Geschwindigkeit v

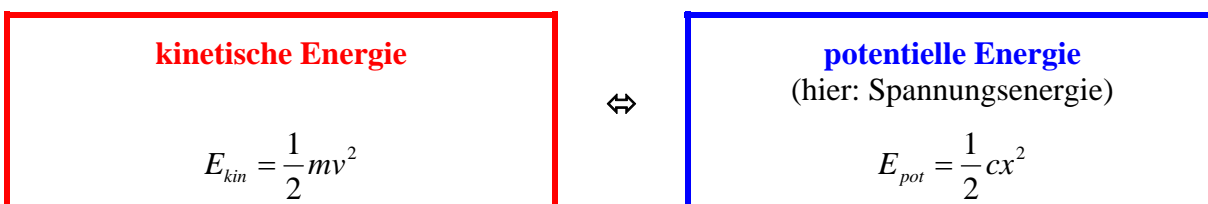
¹ Hier sind Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung etc. zeitabhängige Größen. Die Zeitabhängigkeit wird aber meistens nicht explizit mitgeschrieben, d.h. man schreibt statt $x(t)$ einfach x etc.

gleichzeitig Null sind, dann gilt $x = 0$ und $v = 0$ für beliebige Zeiten², das System bleibt dann für immer in der Gleichgewichtslage. Wenn wir das System aber stören, d.h. wenn wir dem Körper eine Anfangsauslenkung $x \neq 0$ oder/und eine Anfangsgeschwindigkeit $v \neq 0$ geben, dann wird es sich bewegen und (wie wir weiter unten sehen werden) **harmonische Schwingungen** (sinusförmige Schwingungen) ausführen.

Aus dem II. Newtonschen Grundgesetz der Mechanik erhält man für eine x -abhängige Kraft eine **Differentialgleichung**, die die Dynamik des Systems beschreibt. Wichtig für die Lösung dieser Gleichung sind die **Anfangsbedingungen**, d.h. man braucht mindestens zwei Informationen über **Ort** und **Geschwindigkeit** zu vorgegebenen Zeiten.

Energie beim Masse - Feder - Schwinger:

Bewegt sich der an der Feder befestigte Körper, so „pendelt“ die Energie ständig zwischen den Energieformen **kinetische Energie** und **potentielle Energie** hin und her:



- Beim **Nulldurchgang** ist die Feder nicht gespannt, die potentielle Energie ist Null. Dafür bewegt sich der Körper mit maximaler Geschwindigkeit, die **kinetische Energie ist maximal**
- Am **Umkehrpunkt** ist die Geschwindigkeit und damit die kinetische Null, Dafür ist jetzt die Feder maximal gespannt (bzw. gestaucht) und damit die **potentielle Energie maximal**

Wir können auch mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes zur DGL. des HO (Gl.4.1.2.) kommen:

Die Gesamtenergie ist $E_{kin} + E_{pot} = E_{ges}$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}cx^2 = E_{ges} = \text{const.}$$

Da die Gesamtenergie nach dem Energieerhaltungssatz konstant ist, verschwindet Ihre Ableitung nach der Zeit. Wir leiten deshalb die Gleichung nach t ab (Kettenregel beachten!) und erhalten

$$mv \cdot \frac{dv}{dt} + cx \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v!} = \frac{dE_{ges}}{dt} = 0$$

Beachten Sie, dass $\frac{dx}{dt} = v$ und $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ist.

Damit ergibt sich $mv \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + cx \cdot v = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x \right) \cdot v = 0$

Da diese Gleichung für beliebige t gelten muss, ist $v \neq 0$ und wir erhalten Gl.4.1.2.: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0$

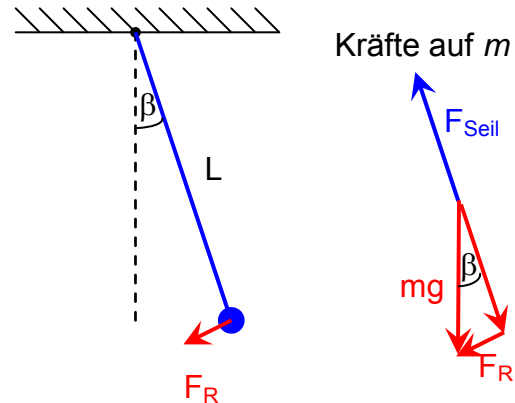
² Wenn $x = 0$ ist, dann ist wegen Gl.4.1.2. auch die Beschleunigung Null, d.h. die Geschwindigkeit ändert sich nicht. Wenn zusätzlich auch die Geschwindigkeit anfangs Null ist, dann bleibt sie auch Null. Damit bleibt der Körper bei $x = 0$ liegen.

Beispiel 2

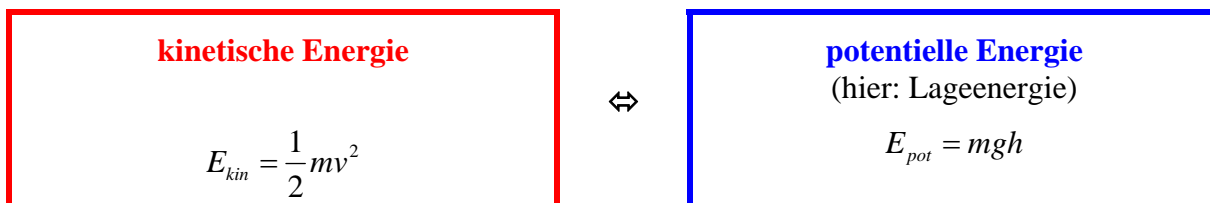
• („Mathematisches“) Pendel:

Ein (kleiner) Körper, näherungsweise ein Massepunkt hängt an einem als masselos betrachteten Seil bzw. einer Stange

In diesem Fall ist die Rückstellkraft nicht streng linear



Auch hier „pendelt“ die Energie zwischen zwei Energieformen:



Bei senkrechter Lage, $\beta = 0$ (Gleichgewichtslage), wird die Gewichtskraft mg durch die Seilkraft F_{Seil} ausgeglichen. Wird der Körper nun z.B. nach rechts ausgelenkt, dann haben Seilkraft und Gewichtskraft verschiedene Richtungen und können sich nicht mehr gegenseitig weg heben. Man zerlegt nun die Gewichtskraft in Komponenten parallel und senkrecht zum Seil. Die parallele Komponente wird durch die Seilkraft ausgeglichen. Die Kraftkomponente senkrecht zur Seilrichtung bleibt als resultierende Kraft übrig. Sie stellt die **Rückstellkraft** F_R dar.

Wählen wir als positive Richtung eine Auslenkung nach rechts, dann ist bei positiver Auslenkung die Kraft nach links gerichtet, also negativ.

Aus der Kräteskizze sieht man: $F_R = -mg \cdot \sin \beta$

Die Auslenkung (Bogenlänge) ergibt sich zu $s = \beta \cdot L$ (☞ **β im Bogenmaß!!!**)

Mit dem Newtonschen Gesetz erhalten wir wieder eine Differentialgleichung: $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cdot \sin \beta$

Hier müssen wir allerdings noch eine der beiden Variablen Bogenlänge s bzw. Winkel β durch die andere Variable ersetzen. Setzen wir für die Bogenlänge $s = \beta \cdot L$ ein, dann ergibt sich (weil L eine Konstante ist und nicht von der Zeit abhängt)

$$L \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -g \cdot \sin \beta \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin \beta(t) = 0$$

Dies ist (wegen $\sin \beta(t)$) eine **nichtlineare DGL** für den Auslenkwinkel $\beta(t)$, die nur numerisch oder mit Näherungsverfahren zu lösen ist.

Für kleine Auslenkwinkel ergibt sich aber eine **näherungsweise lineare Rückstellkraft**, denn für kleine Winkel $\beta \ll 1$ lässt sich die sin-Funktion annähern mit $\sin \beta \approx \beta$ (im Bogenmaß!!!)

Mit dieser Näherung ergibt sich (für kleine Auslenkungen) wieder eine lineare DGL:

$$\frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \beta(t) = 0 \quad \text{[Gl.4.1.3.]}$$

Beachten Sie, dass Gl.4.1.2. und Gl.4.1.3. von der Form her identisch sind – lediglich die Namen der Variablen sind verschieden. Beide Gleichungen bedeuten in Worten: Die zweite Ableitung der gesuchten Funktion plus eine positive Konstante mal dieser Funktion müssen zu jedem Zeitpunkt Null ergeben. Oder, anders ausgedrückt: Die 2. Ableitung muss bis auf eine negative Konstante mit der Funktion übereinstimmen.

Mathematische Ergänzung zur Näherungsformel für $\sin(x)$:

Für $x \ll 1$ gilt $\sin x \approx x$ (x im Bogenmaß!!!)

a) Probieren Sie das mit Ihrem Taschenrechner aus:

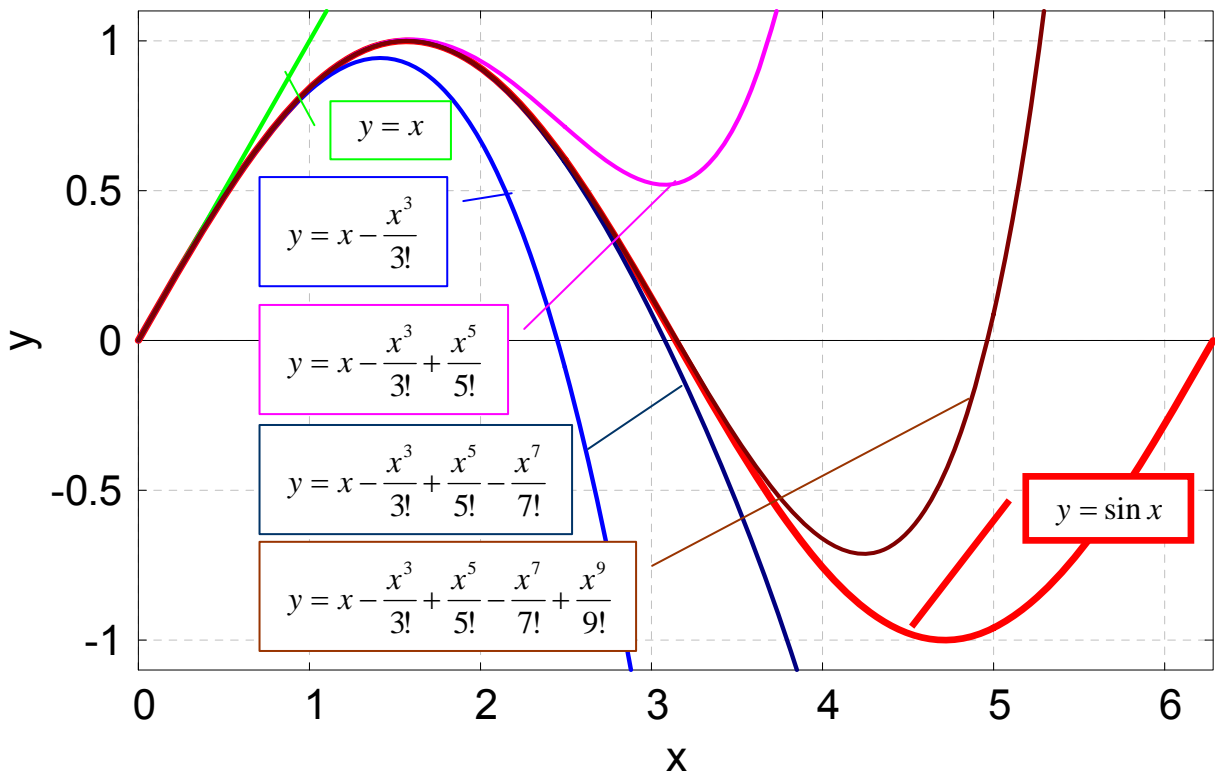
b) Die **Taylor-Reihe** (siehe Mathe!) der \sin -Funktion (um den Entwicklungspunkt $x = 0$) lautet:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$x = 1$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$
$x = 0.1$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$
$x = 0.01$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$
$x = 0.001$	$\sin \alpha = \dots\dots\dots$

Dies bedeutet, die \sin -Funktion lässt sich durch Polynome annähern (siehe auch Datei `taylor_sin.plt`!). Bereits mit der 5. Potenz ist im ersten Quadranten die maximale Abweichung kleiner als 0.005 und in der Grafik nicht mehr zu erkennen.

Taylor-Reihe \sin -Fkt.



Für kleine x können die höheren Potenzen von x gegenüber x^1 vernachlässigt werden und man erhält die gesuchte Näherungsformel. Letzen Endes wird also für kleine x der Verlauf der \sin -Kurve durch ihre **Tangente im Ursprung** angenähert.

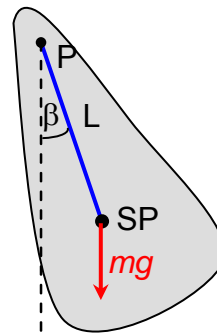
Übungsaufgabe: Wie wird die Taylor-Reihe gebildet (siehe Mathe-Buch!) ?

Bestimmen Sie damit für $x \ll 1$ Näherungsformeln der Funktionen e^x , $\sqrt{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\cos x$!

Beispiel 3

• „Physikalisches“ Pendel:

Das physikalische Pendel unterscheidet sich vom mathematischen Pendel dadurch, dass die Masse nun nicht mehr als punktförmig angenommen wird. Jetzt rotiert ein **starrer Körper** um einen Aufhängepunkt P (P kann innerhalb oder außerhalb des Körpers liegen). Die Gewichtskraft greift am **Schwerpunkt** des Körpers (SP) an und erzeugt somit ein **Drehmoment**.



Das Drehmoment ergibt sich zu $M = -mg \cdot L \cdot \sin\beta$ bzw. mit der Näherung für kleine Auslenkungen $M \approx -mg \cdot L \cdot \beta$


Dieses Drehmoment bewirkt beim starren Körper mit dem Massenträgheitsmoment J_p (bzgl. der Drehachse durch P Steinerscher Satz!) eine Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d^2 \beta}{dt^2}$:

$$M = J_p \alpha$$

Eingesetzt ergibt sich $J_p \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -mg \cdot L \cdot \beta$

oder $\frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{mg \cdot L}{J_p} \cdot \beta(t) = 0$ [Gl.4.1.4.]

Anmerkung: Das „mathematische Pendel“ ergibt sich hieraus als Spezialfall. Eine Punktmasse im Abstand L vom Drehpunkt hat das Massenträgheitsmoment $J_p = mL^2$. Eingesetzt in Gl.4.1.4. erhält man damit Gl.4.1.3. !

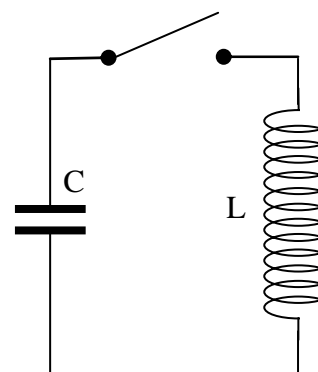
 **Übungsaufgabe:** Die Rotationsenergie eines starren Körpers ist $E_{rot} = \frac{1}{2} J_p \omega^2$, dabei ist $\omega = \frac{d\beta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit. Für die Lageenergie gilt wie beim Massepunkt $E_{pot} = mgh$, wobei h die Höhe des Schwerpunkts (Nullpunkt ist frei wählbar) ist.

Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz und leiten Sie daraus die DGL. des HO für das physikalische Pendel her (Gl.4.1.4.)!

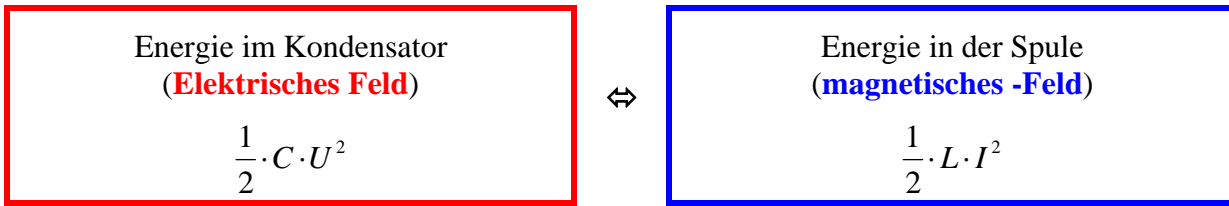
Beispiel 4

• Elektr. Schwingkreis (LC-Kreis)

Ein Kondensator C wird zunächst aufgeladen (in der Skizze nicht dargestellt). Dann wird der Schalter geschlossen. Vom Kondensator kann nun ein Strom durch die Spule mit der Induktivität L fließen. Wegen der Induktivität fängt der Strom nicht schlagartig an zu fließen, sondern baut sich langsam auf. Zu dem Zeitpunkt, in dem der Kondensator entladen ist, fließt der maximale Strom. Von nun an nimmt der Strom ab und durch die Induktionsspannung wird der Kondensator mit umgekehrter Polarität aufgeladen.



Auch hier „pendelt“ die Energie zwischen zwei Energieformen hin und her:



Das Wechselspiel von Spannung am Kondensator und Strom in der Spule ähnelt also z.B. dem von Geschwindigkeit der Masse und Kraft der Feder beim Masse-Feder Schwinger. Tatsächlich erhält man auch hier eine ganz ähnliche Differentialgleichung:

Die Induktionsspannung an der Spule muss gleich der Spannung am Kondensator sein. Daraus ergibt sich: $U + L \frac{dI}{dt} = 0$

Wegen $Q = C \cdot U$ (Ladung) ist $I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}$ und somit $\frac{dI}{dt} = C \cdot \frac{d^2U}{dt^2}$. Eingesetzt ergibt sich

$$U + LC \cdot \frac{d^2U}{dt^2} = 0$$

oder, auf Standardform gebracht:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot U(t) = 0 \quad \text{[Gl.4.1.5.]}$$

Auch diese DGL. erhalten wir alternativ aus einer Energiebetrachtung:

Es ist $\frac{1}{2} L \cdot I^2 + \frac{1}{2} C \cdot U^2 = E_{ges} = \text{const.}$

Ableiten nach der Zeit liefert $L \cdot I \dot{I} + C \cdot U \dot{U} = 0$

mit $I = C \cdot \dot{U}$ wird daraus $L \cdot C \dot{U} \cdot C \ddot{U} + C \cdot U \dot{U} = 0$ bzw. $(LC \ddot{U} + U) \cdot \dot{U} = 0$

und (wegen $\dot{U} \neq 0$, für beliebige $t!$) ergibt sich daraus wieder die DGL.4.1.5.

weitere Bsp.:

- Hangabtriebskraft (Mulde, Schale, ...):
- Flüssigkeit in U-Rohr (⇒Üb.-Aufg.!))
- Drehschwingungen



...

Alle bisher besprochenen Beispiele haben gemeinsam:

- ◆ Gleichgewichtslage
- ◆ Rückstellkraft (linear, näherungsw. linear)
- ◆ (Massen-) Trägheit

4.1.1.1 Differentialgleichung des Harmonischen Oszillators

Die Dynamik der oben besprochenen Beispiele wird durch die gleiche DGL. beschrieben - lediglich die "Namen" der Variablen sind verschieden! Man bezeichnet eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\text{const.} \cdot x(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \text{const.} \cdot x(t) = 0 \quad \text{kurz als „DGL. des harmonischen$$

Oszillators (HO)“. Alle diese Systeme lassen sich einheitlich beschreiben, wenn wir für alle die „Auslenkung“ einheitlich mit „ x “ und die (positive!) Konstante in der DGL. mit „ ω_0^2 “ bezeichnen.

Allgemeine Form der

DGL. des HO:
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad \text{[Gl.4.1.6.]}$$

Je nachdem welches schwingungsfähige System vorliegt bezeichnet „ x “ also unterschiedliche Größen und „ ω_0^2 “ wird anders aus den Systemeigenschaften berechnet. Dabei hat „ ω_0^2 “ aber immer die gleichen **Einheiten**, unabhängig von den Einheiten von „ x “. Man sieht dies, wenn man die Einheiten der Gl.4.1.6. analysiert:

$$\frac{[x]}{[t^2]} = [\omega_0^2] \cdot [x] \quad ([...] \text{ bedeutet „Einheiten von ...“!})$$

Es gilt also immer:
$$[\omega_0^2] = \frac{1}{[t^2]} = \frac{1}{s^2} \quad \text{[Gl.4.1.7.]}$$

Für jedes Beispiel erhalten wir allerdings eine spezielle Formel zur Berechnung der Konstanten „ ω_0^2 “ aus den Eigenschaften des Systems.

Beispiel 1	Masse - Feder - Schwinger	Gl.4.1.2. : $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$	$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$
Beispiel 2	Mathematisches Pendel	Gl.4.1.3. : $\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \beta = 0$	$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$
Beispiel 3	Physikalisches Pendel	Gl.4.1.4.: $\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \beta = 0$	$\omega_0^2 = \frac{mg \cdot L}{J_p}$
Beispiel 4	Elektrischer Schwingkreis	Gl.4.1.5. : $\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot U = 0$	$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
Allgemein: ...		Gl.4.1.6. : $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$	$\omega_0^2 = \dots$

[Gl.4.1.8.]

Wir kennen jetzt die Differentialgleichung, die schwingungsfähige (lineare) Systeme beschreibt. Wir wissen auch, was physikalisch passiert (\Rightarrow „es schwingt!“). Wie aber lösen wir die DGL. ?

Es gibt sehr viele verschiedene Typen von Differentialgleichungen und dementsprechend viele verschiedene Methoden zur Lösung (wie Sie sicher noch in Mathe lernen werden ...). Nur einige spezielle Differentialgleichungen lassen sich direkt integrieren (evtl. nach „Separation der Variablen“). Die Laplace-Transformation überführt DGL in algebraische Gleichungen und stellt ein mächtiges Werkzeug zur Lösung von DGL dar. Viele DGL lassen sich allerdings gar nicht analytisch lösen und müssen deshalb numerisch behandelt werden.

Dies ist für uns (im 2. Semester) alles zu kompliziert ...

- Wichtig ist in jedem Fall, sich zunächst die Struktur der Gleichung anzusehen und zu erkennen, um welchen DGL – Typ es sich handelt

Unsere „DGL des HO“ ist eine „gewöhnliche lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten“. In ihrem Mathe-Buch finden Sie Lösungsverfahren für diesen DGL-Typ und allgemeine Lösungsansätze.

Wir machen uns die Lösung einfacher: Wir wissen aus der Physik, dass die Lösung Schwingungen beschreiben muss, wir „raten“ einen Lösungsansatz, setzen diesen in die DGL ein und zeigen, dass der Ansatz die Gleichung löst.

Rezept: Lösung von Differentialgleichungen für Fußgänger:

- **Ansatz** $x(t) = \dots$
(...intelligent geraten), "allgemein genug" für alle Fälle, d.h. mit "genügend" Parametern
- benötigte **Ableitungen ausrechnen!**
- Ansatz $x(t)$, Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... in DGL **einsetzen!**
- Es ergibt sich eine Gleichung, die **für alle t** erfüllt sein muss! Evtl. kann dies nur für bestimmte Parameterwerte erreicht werden (→ Koeffizientenvergleich!). Falls die Gleichung gar nicht zu erfüllen ist: Besseren Ansatz machen!
- **Anfangsbedingungen** festlegen (bzw. aus Aufgabentext entnehmen!), restliche Parameter aus Anfangsbedingungen berechnen!



Um einen brauchbaren Ansatz zu finden genügt es, wenn wir z.B. bei einem der oben behandelten Beispiele experimentell ermitteln, was passiert. Da alle Systeme durch die gleiche DGL beschrieben werden, gilt der Lösungsansatz dann für alle Systeme! Ein Versuch, für die Lösung **harmonische Schwingungen**, d.h. Sinus- oder Kosinus-Funktionen zu verwenden, liegt nahe:

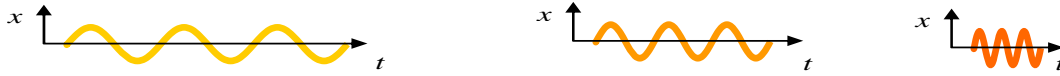
Ansatz zur Lsg. der HO-DGL: **Harmonische Schwingungen**
cos – bzw. sin – Funktionen !



Aus mehreren Gründen kann die Lösung aber nicht einfach $\sin t$ oder $\cos t$ lauten:

- Die Zeit t hat Einheiten, $[t] = s$! Das Argument der (transzendenten) sin-Funktion muss aber einheitenlos sein.
- Die sin-Funktion selbst dagegen hat keine Einheiten, die mit $x(t)$ beschriebenen Größe dagegen hat in der Regel Einheiten (m, V, Pa, ...)

- Masse-Feder-Schwinger etc. können unterschiedlich „schnell“ schwingen. Abhängig ist dies von der Größe der Masse und von der Federhärte. Wir brauchen also einen Parameter in der Gleichung, der dies widerspiegelt.

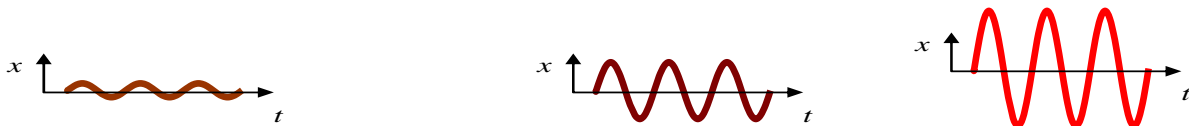


Die Differentialgleichung sagt uns nur, wie sich das System weiterentwickelt, wenn es einmal aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wurde. Die „**Anfangsbedingungen**“ müssen aber bekannt sein! Bei den mechanischen Beispielen sind wir vom Newtonschen Gesetz („Kraft = Masse * Beschleunigung“) ausgegangen. Um die zeitliche Entwicklung zu berechnen

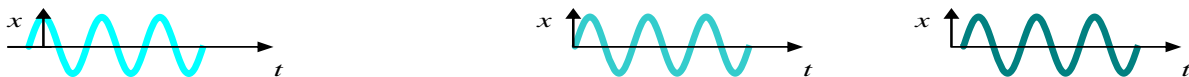
brauchen wir aber außer der Beschleunigung $\left(a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$ noch z.B. Ort und Geschwindigkeit bei

$t = 0$! Konkret bedeutet das, dass ein Oszillator je nach Anfangsbedingungen unterschiedlich schwingen kann und wir 2 weitere Parameter in unseren Ansatz aufnehmen müssen:

- Ein Oszillator kann unterschiedlich stark angestoßen werden, so dass die maximale Auslenkung verschieden groß wird. Wir brauchen also einen Parameter, der die Schwingungsweite (Amplitude) beschreibt (der natürlich von den Anfangsbedingungen abhängen wird).



- Ein Oszillator kann zu unterschiedlichen Zeiten angestoßen werden, so dass sich der Zeitpunkt eines Maximums, eines Nulldurchgangs etc. verschiebt. Wir brauchen also noch einen weiteren Parameter, der ebenfalls von den Anfangsbedingungen abhängen wird.



Wir versuchen es deshalb z.B. mit dem folgenden Ansatz:

Allgemeiner Ansatz zur Lösung der Gl.4.1.6.: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

Dieser Ansatz hat zunächst 3 unbekannte Parameter (ω, A, φ_0). Zwei dieser Größen sollten sich aus den Anfangsbedingungen, die dritte Größe sollte sich aus den Systemeigenschaften ergeben.

Für unsere DGL. benötigen wir (vergl. „**Rezept**“) die 2. Ableitung:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Wir setzen gem. „**Rezept**“ den Ansatz und die 2. Ableitung in die DGL. ein

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

und erhalten:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cdot A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\text{bzw. } A \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Beachten Sie:

ω_0 ist eine Abkürzung für die in der DGL. auftretende Konstante. ω_0 kann von Fall zu Fall aus den Eigenschaften des Oszillators (vergl. Gl.4.1.8.) bestimmt werden.

ω ist ein zunächst noch unbekannter Parameter in unserem Ansatz (die „Kreisfrequenz der Schwingung“).

Nach „**Rezept**“ muss diese Gleichung (wenn unser Ansatz vernünftig ist!) für beliebige t erfüllt sein. Da rechts „=0“ steht muss der Koeffizient vor der zeitabhängigen \cos -Funktion Null sein. $A = 0$ scheidet aus (\Rightarrow „triviale Lösung“, siehe Diskussion von Gl.4.1.2.). Es bleibt also nur noch die Möglichkeit: $(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$ oder $\omega = \omega_0$

➤ Der Ansatz $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ löst die DGl. Gl.4.1.6. nur für $\omega = \omega_0$

- Der bisher „unbekannte“ Parameter ω (der die „Schnelligkeit“ der Schwingung beschreibt) ergibt sich also aus den „Systemeigenschaften“.
- Unabhängig von den weiteren zwei Parametern ist der Ansatz damit Lösung der DGl. Diese Parameter müssen somit aus Anfangsbedingungen bestimmt werden!

- $x(t)$ heißt (momentane) **Auslenkung** („**Elongation**“) Oszillators
- $x(t)$ hat (je nachdem welche physikalische Größe schwingt) unterschiedliche Einheiten
- ω_0 heißt **Kreisfrequenz** des Oszillators (der Index 0 steht für „ungedämpft“),
- ω_0 hat die Einheiten $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ oder einfach $\frac{1}{\text{s}}$
- φ_0 heißt **Nullphasenwinkel** oder Phasenkonstante und legt die Phasenlage der Schwingung fest
- A legt die **Amplitude**³ der Schwingung fest. Es gilt $-|A| \leq x(t) \leq +|A|$.
- A hat die gleichen Einheiten wie $x(t)$

Aus der **Kreisfrequenz** ω ergibt sich die Schwingungsdauer T und die Frequenz f der Schwingung. Da \cos - und \sin -Funktion 2π -periodisch sind, d.h. sich wiederholen, wenn das Argument sich um 2π verändert hat, gilt: $\omega T = 2\pi$, bzw.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{Gl.4.1.9.}]$$

Die **Frequenz** (Einheit: Hz) ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeit und ergibt sich aus dem Kehrwert der Schwingungsdauer:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Gl.4.1.10.}]$$

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad [\text{Gl.4.1.11.}]$$

³ Als „allgemeiner Vorfaktor“ im Lösungsansatz $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ kann A evtl. auch negativ werden. Durch geeignete Wahl von φ_0 kann man aber immer $A > 0$ erreichen.

Die **Amplitude** \hat{x} (Schwingungsweite, Scheitelwert) ist der Maximalwert der Auslenkung.

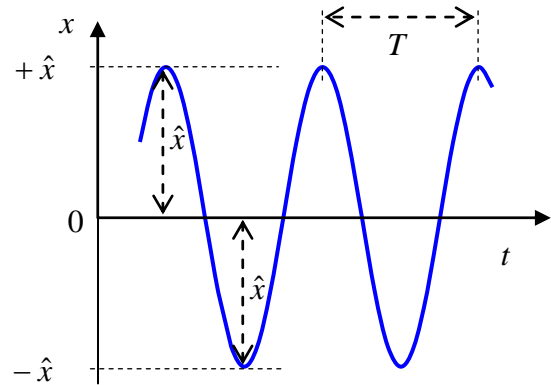
Bei einer Schwingung der Form $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ist $|A|$ die Amplitude

(bzw. einfach A , falls A positiv ist).

Wir können dann auch einfacher schreiben :

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[Gl.4.1.12.]



☞ Verwechseln Sie nicht die **Amplitude** mit der **momentanen Auslenkung** (Elongation) $x(t)$!

Die **Geschwindigkeit** $v(t)$ erhalten wir, indem wir Gl.4.1.12. differenzieren: $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$v(t) = -\omega_0 \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[Gl.4.1.13.]

Es ist $-\omega_0 \hat{x} \leq v(t) \leq \omega_0 \hat{x}$. Wir bezeichnen die **Maximalgeschwindigkeit** $\omega_0 \hat{x}$ deshalb auch als

Geschwindigkeitsamplitude

$$\hat{v} = \omega_0 \hat{x}$$

[Gl.4.1.14.]

Die betragsmäßig größte Geschwindigkeit ($\pm \hat{v}$) wird immer dann erreicht, wenn $x = 0$ ist, d.h. beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage (Nulllage).

Analog ergibt sich die Beschleunigung als $a(t) = \frac{dv}{dt}$:

Beschleunigung:

$$a(t) = -\omega_0^2 \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[Gl.4.1.15.]

Die **Maximalbeschleunigung** (Beschleunigungsamplitude) ist somit:

Beschleunigungsamplitude

$$\hat{a} = \omega_0 \hat{v} = \omega_0^2 \hat{x}$$

[Gl.4.1.16.]

Die betragsmäßig größte Beschleunigung ($\pm \hat{a}$) erhält man immer dann, wenn $v = 0$ ist, d.h. an den Umkehrpunkten der Schwingung (Maxima/Minima von $x(t)$).

4.1.1.2 Anfangsbedingungen

In unserer Lösung der DGL. sind noch zwei freie Parameter. Wir müssen diese so bestimmen, dass bestimmte **Anfangsbedingungen** oder Randbedingungen (z.B. Auslenkung und Geschwindigkeit zu bestimmten Zeiten) erfüllt sind.

Zunächst wollen wir uns aber klar machen, dass man harmonische Schwingungen mathematisch durch unterschiedliche Gleichungen darstellen kann.

Sinus- und die Kosinus-Funktionen unterscheiden sich nur in der „Phasenlage“, sie gehen durch Verschiebung (auf der Zeitachse) ineinander über ($\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$). Mit Hilfe der Additionstheoreme für die sin- bzw. die cos- Funktion lässt sich außerdem eine cos-Funktion mit Phasenverschiebung auch als eine Überlagerung von sin- und cos-Funktionen ohne Phasenverschiebung darstellen:

$$\hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = \underbrace{\hat{x} \cdot \cos(\varphi_0)}_B \cdot \cos(\omega t) - \underbrace{\hat{x} \cdot \sin(\varphi_0)}_C \cdot \sin(\omega t)$$

$$= B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$$

Neben dem Ansatz $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ gibt es deshalb noch weitere mathematische Beschreibungsmöglichkeiten für harmonische Schwingungen.

Die **DGL. des harmonischen Oszillators** $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ (Gl.4.1.6.)

lässt sich durch folgende Ansätze lösen:

Ansatz 1: $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (Gl.4.1.12.)

Ansatz 2: $x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi'_0)$ [Gl.4.1.17.]

Ansatz 3: $x(t) = \underline{B} \cos(\omega_0 t) + \underline{C} \sin(\omega_0 t)$ [Gl.4.1.18.]

Diese drei Ansätze ...

- erfüllen alle die DGL (☞ nachrechnen!)
- haben jeweils zwei **freie Parameter**, die aus **Anfangsbedingungen** bestimmt werden müssen!
- sind völlig gleichwertig

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ergibt sich mit komplexen Zahlen (siehe unten!)

„Völlig gleichwertig“ bedeutet hier, dass nicht ein Ansatz „richtig“ und die anderen „falsch“ sind, sondern dass Sie nach persönlichem „Gusto“ eine der Funktionen auswählen können. Allerdings ist es für bestimmte Anfangsbedingungen einfacher, mit der sin-Funktion zu arbeiten, für andere Anfangsbedingungen wiederum ist es einfacher, mit der cos-Funktion zu arbeiten, weil dann jeweils der Nullphasenwinkel φ verschwindet.

 **Übung:**

- Warum muß jeder Ansatz zwei freie Parameter enthalten ?
- Warum genügt ein Ansatz (a) $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$
bzw. (b) $x(t) = B \sin(\omega_0 t)$ **im allgemeinen Fall** nicht ?
.....
- Welche Anfangsbedingungen lassen sich mit Ansatz (a) (cos) , welche mit Ansatz (b) (sin) beschreiben ?

Bsp.:			Ansatz (a) (cos)	Ansatz (b) (sin)	weder (a) noch (b)
a.)	$x(0) = 0$	$v(0) = 1 \text{ m/s}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.)	$x(0) = 1 \text{ m}$	$v(0) = 1 \text{ m/s}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.)	$x(0) = 1 \text{ m}$	$v(0) = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Beispiel : Feder-Masse-Schwinger,
Bestimmung der freien Parameter aus den Anfangsbedingungen

$$m = 10 \text{ g} , c = 0,49 \text{ N/m}$$

Anfangsbedingungen ($t = 0$):

$$x(0) = x_0 = 13,61 \text{ mm}$$

$$v(0) = v_0 = -187,2 \text{ mm/s}$$

Ansatz: $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (natürlich „geht“ auch Ansatz 2 oder 3 ...)

Wir berechnen zunächst die Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 7/\text{s}$

Daraus ergibt sich die Frequenz und die Schwingungsdauer: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{7/\text{s}}{2\pi} = 1,1 \text{ Hz}$
 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,90 \text{ s}$

Wir berechnen dann die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

und setzen die gegebenen Anfangsbedingungen (bei $t = 0$) ein:

$$\textcircled{1} \quad x(0) = A \cdot \cos(\varphi_0) = x_0$$

$$\textcircled{2} \quad v(0) = -A\omega_0 \cdot \sin(\varphi_0) = v_0$$

Wir erhalten damit zwei Gleichungen ($\textcircled{1}$ u. $\textcircled{2}$), die wir jetzt noch nach A und φ_0 auflösen müssen. Da der Faktor A in beiden Gl. vorkommt dividieren wir eine der zwei Gleichungen durch die andere Gl., so dass sich A herauskürzt:

$$\frac{\text{Gl. (2)}}{\text{Gl. (1)}} : \quad \frac{-A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\varphi_0)}{A \cdot \cos(\varphi_0)} = -\omega_0 \cdot \tan(\varphi_0) = \frac{v_0}{x_0}$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) = 1,10 \text{ (rad)}$$

Jetzt können wir φ_0 in Gl. $\textcircled{1}$ einsetzen und die Amplitude bestimmen:

$$A = \frac{x_0}{\cos(\varphi_0)} = 0,030 \text{ m}$$

⇒ **Lösung** $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ mit $A = 0,030 \text{ m}$, $\varphi_0 = 1,10$ und $\omega_0 = 7/\text{s}$

(Siehe auch GNUPLOT-File "ho_anfangsbed_bsp.plt" !)

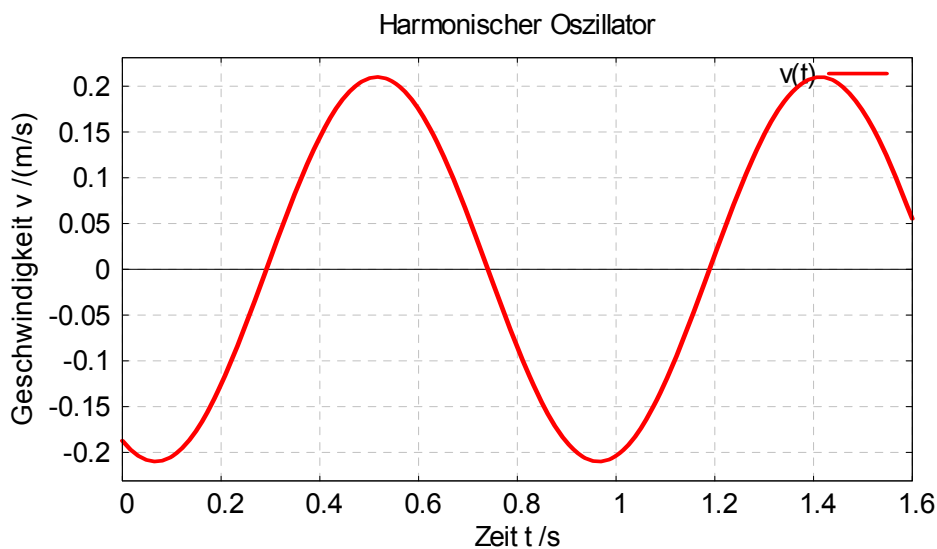
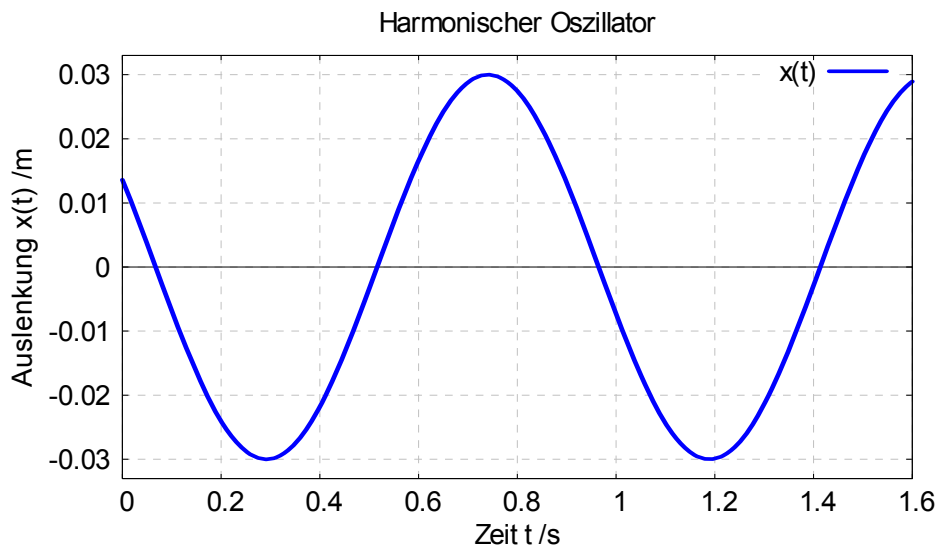
☞ Lösen Sie dieses Beispiel auch mit den anderen Ansätzen!

Bem.: Alle 3 Ansätze liefern richtiges Ergebnis und identische Diagramme!

Hinweis: Es ist meistens praktischer rund übersichtlicher, wie oben die Variablen in der Gleichung stehen zu lassen und nicht etwa die berechneten Zahlenwerte mit ihren Einheiten direkt in die Gleichung einzusetzen (ausgeschrieben wäre die „unübersichtliche Version“ hier:

$$x(t) = 0.03 \text{ m} \cdot \cos\left(7 \frac{1}{\text{s}} \cdot t + 1.1\right) .$$

Dies gilt insbesondere dann, wenn mit der Gleichung noch weitergerechnet werden soll!



☞ Weitere Übungsaufgaben zu diesem Beispiel:

1. Wann erreicht der Körper erstmals das Maximum/Minimum der Auslenkung ?
2. Wo ist er bei $t_1 = 0,15$ s ? Wie groß ist dann die Geschwindigkeit ?
3. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit, wann wird sie erstmals erreicht ?

Wie gehen Sie vor, wenn andere Anfangs-/Randbedingungen gegeben sind, z.B.

- Auslenkung und Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten
- Auslenkung zu zwei verschiedenen Zeiten
- Geschwindigkeit zu zwei verschiedenen Zeiten

☞ Weitere Anregungen zur Übung:

Denken Sie sich Zahlenbeispiele für Frequenz, Amplitude, Nullphasenwinkel aus.

1. Berechnen Sie damit 2 Anfangswerte (v und/oder x) und lassen Sie nun einen Kommilitonen die Parameter bestimmen!
2. Plotten Sie die Funktion $x(t)$ (Gnuplot, Excel, Maple, ...) und lassen Sie einen Kommilitonen aus einem Ausdruck der Grafik die Parameter bestimmen!

4.1.1.3 Komplexe Zahlen und Schwingungen

Zur Erinnerung an Mathe: **Komplexe Zahlen**

Imaginäre Einheit („i“ oder „j“)

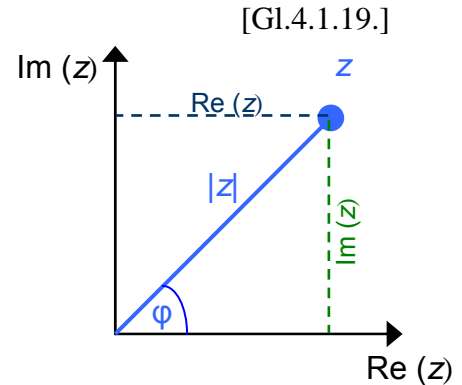
$$j = \sqrt{-1}$$

komplexe Zahl = Realteil + j · Imaginärteil

Gaußsche Zahlenebene:

$$z = \text{Re}(z) + j \cdot \text{Im}(z)$$

$$z = x + j \cdot y$$



- Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen!
- Lediglich $j^2 = -1$ muss beachtet werden.
- Konjugiert komplexe Zahl z^* : für $z = x + jy$ ist $z^* = x - jy$ [Gl.4.1.20.]
also: j durch $-j$ ersetzen!
- Betrag einer komplexen Zahl: $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ [Gl.4.1.21.]

Auch **Division** durch komplexe Zahlen ist **erlaubt** (Unterschied zu Vektoren!).
Erweiterung mit komplex konjugierter Zahl ergibt reellen Nenner ...

Äquivalent zur Darstellung $z = \text{Re}(z) + j \cdot \text{Im}(z)$ (**Real-** und **Imaginärteil**)
ist die Darstellung als „Länge“ u. „Winkel“, **Betrag** und „Argument“ (Winkel, Phase):

➤ Es gilt die **Eulersche Formel**: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$ [Gl.4.1.22.]

➤ Laut Richard Feynman ist dies „**die bemerkenswerteste Formel der Mathematik**“ !

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \quad [\text{Gl.4.1.23.}]$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \quad [\text{Gl.4.1.24.}]$$

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} \quad [\text{Gl.4.1.25.}]$$

Begründung der Euler-Formel (Gl.4.1.22.)

Reihenentwicklung der exp-Funktion : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots$

Setzt man für „x“ $j \varphi$ ein so erhält man $e^{j\varphi} = 1 + j \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - j \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j \frac{\varphi^5}{5!} \dots$

Durch Vergleich mit der Reihenentwicklung der cos- u. sin- Fkt. ...

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \dots$$

$$\sin \varphi = + \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots \quad \Rightarrow \quad j \cdot \sin \varphi = + j \frac{\varphi}{1!} - j \frac{\varphi^3}{3!} + j \frac{\varphi^5}{5!} \dots$$

... erhält man die Euler-Formel

WARUM verwenden wir komplexe Zahlen

zur Berechnung von

- Schwingungen
- Wechselstromnetzwerken
- zur Lösung von verschiedenen anderen Differentialgleichungen
- und bei vielen anderen Problemen in den Ingenieurwissenschaften (Elektronik, Nachrichtentechnik, Signalverarbeitung, Regelungstechnik, Bildverarbeitung, ...)



weil ...

Euler-Formel (Gl.4.1.22.)

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

ergibt einen Zusammenhang zwischen
sin-/cos- Funktionen (**Schwingungen**)

und **exp-Funktion!**

Vorteile: Mit exp-Funktionen rechnet sich's leichter !

- **Einfache Rechenregeln** der Algebra: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ ☺
- **dagegen:** $\sin(a+b) = \dots$ ☹
(siehe: Additionstheorem aus Mathe-Formelsammlung)
- **Einfacheres Differenzieren:** $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \underline{\lambda} \cdot e^{\lambda t}$ ☺

Ableitung entspricht **Multiplikation mit konstantem Koeffizienten λ !**

Da λ auch komplex sein kann, ändert sich allein durch Multiplikation mit λ auch die Phasenlage. Z.B. vertauscht ein rein imaginäres λ den Real- und den Imaginärteil und damit sin und cos!

dagegen: sin/cos-Fkt: $\frac{d}{dt}(\cos(\lambda t)) = -\lambda \cdot \sin(\lambda t)$ ☹

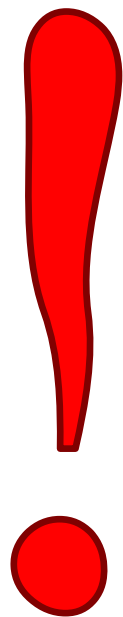
Kosinus wird abgeleitet zu Sinus: Die andere Phasenlage der Ableitung wird durch eine **andere Funktion** (und evtl. Vorzeichenwechsel) beschrieben ☹

- Die zwei **freien Parameter** Amplitude und Nullphasenwinkel (abhängig von den Anfangsbedingungen!) können in **einem (komplexen) Vorfaktor** zusammengefasst werden!

➤ **Vorgehensweise** bei der Lösung der **Schwingungsdifferentialgleichung** (lineare DGL.) mit Hilfe von komplexen Zahlen:

- Wir haben eine DGL. für die reelle, physikalische Funktion $x(t)$
- Wir ersetzen in der DGL. die gesuchte Funktion $x(t)$ durch eine komplexe Funktion $z(t)$
- Wir lösen die DGL. (gem. **Rezept Seite 11**), d.h. wir bestimmen $z(t)$.
- Die komplexe Funktion $z(t)$ besteht aus Realteil und Imaginärteil, $z(t) = \text{Re}(z) + \text{Im}(z)$, beide sind ebenfalls Lösung der (linearen) DGL.
- Wir wählen den Realteil und interpretieren diesen als die physikalisch relevante Funktion $x(t) = \text{Re}(z)$

- DGL. des HO: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ (Gl.4.1.6.)



- Umgeschrieben für komplexes $z(t)$: $\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0$
- Ansatz: $z(t) = \hat{Z} e^{\lambda t}$ (\hat{Z} und λ können komplex sein!)
- Ableitungen ausrechnen
 $\frac{dz}{dt} = \lambda \cdot \hat{Z} e^{\lambda t} = \lambda \cdot z(t)$
 $\frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda^2 \cdot z(t)$
- Ansatz und Abl. in DGL einsetzen: $\lambda^2 z(t) + \omega_0^2 z = 0$
 $(\lambda^2 + \omega_0^2) \cdot z = 0$
- „...=0“ muss für beliebige t gelten $\Rightarrow z \neq 0, (\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$
- Der Koeffizient λ ergibt sich also aus: $\lambda^2 = -\omega_0^2$,

$$\lambda = j\omega_0 \quad (4)$$

- Für $\lambda = j\omega_0$ ist der Ansatz $z(t) = \hat{Z} e^{\lambda t}$ eine Lösung der DGL. $\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0$

- Die Lösung im Komplexen ist also: $z(t) = \hat{Z} e^{j\omega_0 t}$ [Gl.4.1.26.]

- Physikalisch interessiert uns davon nur der Realteil:

Wir schreiben deshalb den komplexen Vorfaktor \hat{Z} mit Betrag und Phase: $\hat{Z} = |\hat{Z}| \cdot e^{j\varphi_0}$

Damit ergibt sich für $z(t)$: $z(t) = |\hat{Z}| e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t}$

$$z(t) = |\hat{Z}| \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Der physikalisch interessante Realteil ergibt sich nun einfach zu ...

$$x(t) = \text{Re}(z)$$

$$x(t) = |\hat{Z}| \cdot \text{Re}(e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)})$$

was wir mit Hilfe der Euler-Gl. (Gl.4.1.22.) auch als cos-Funktion schreiben können:

$$x(t) = |\hat{Z}| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Durch Vergleich mit unserer Lösung (Gl.4.1.12.) der reellen DGL. sehen wir:

⁴ Die Gleichung $\lambda^2 = -\omega_0^2$ hat außer $\lambda = +j\omega_0$ noch die Lösung $\lambda = -j\omega_0$, die uns aber als „negative Frequenz“ nicht interessiert.

Der komplexe Ansatz $z(t) = \hat{Z} e^{j\omega_0 t}$ löst ebenfalls die **Schwingungsdifferentialgleichung**

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0.$$

- Der komplexe Faktor \hat{Z} beschreibt dabei gleichzeitig die Amplitude und die Phasenlage der Schwingung.
- Der Betrag von \hat{Z} ist die Amplitude $\hat{x} = |\hat{Z}|$ [Gl.4.1.27.]
- Das „Argument“ (Winkel) von \hat{Z} ergibt den Nullphasenwinkel der Schwingung

$$\underbrace{\hat{Z}}_{\text{komplex}} = \underbrace{\hat{x}}_{\text{reell}} \cdot e^{j\varphi_0} \quad \text{mit } \hat{x} = |\hat{Z}|$$
 [Gl.4.1.28.]
- Als Realteil der Lösung erhält man wieder die bereits bekannte harmonische Schwingung

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
 mit der Kreisfrequenz ω_0 , der Amplitude \hat{x} und dem Nullphasenwinkel φ_0

Die Vorteile der komplexen Rechnung zeigen sich noch deutlicher bei den gedämpften Schwingungen, bei den erzwungenen Schwingungen (Resonanz) und bei der Beschreibung von Wellen. Wir werden diese Rechnung i. allg. nur noch mit komplexen Zahlen ausführen und höchstens ganz am Schluss zum Realteil übergehen

4.1.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Zusammenfassung Kap, 4.1.1 :

Aus der Grundgleichung der Dynamik, dem II. Newtonschen Gesetzes $m \cdot a = F_{res}$ hatten wir z.B. für das Masse-Feder-System mit der linearen Rückstellkraft

$$F_{res} = -c x \quad (\text{Federkraft ist die einzige wirkende Kraft, keine Reibung!})$$

die folgende Differentialgleichung erhalten:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot x$$

Die Lösung dieser DGI sind ungedämpfte, harmonische Schwingungen, deren Schwingungsamplitude mit der Zeit **NICHT** abnimmt! Die Summe aus kinetischer und potentieller (Spannungs-) Energie bleibt dabei konstant.

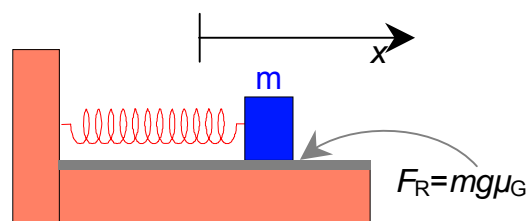
Eine realer Oszillator verhält sich in der Regel anders: Die Schwingungsamplitude nimmt ab, ein Teil der Energie wird durch Reibung in Wärme (oder andere Energieformen) umgewandelt. Bei Reibung (vergl. Kap. 1.2.4.3) ist zu unterscheiden zwischen Kräften, die nicht von der Geschwindigkeit v abhängen (äußere Reibung, → 4.1.2.1) und solchen die von v abhängen, insbesondere solchen, die zu v proportional sind (Newtonsche oder „viskose“ Reibung → 4.1.2.2).

4.1.2.1 Geschwindigkeitsunabhängige Reibung

Bsp.: Masse schwingt an Feder, gleitet dabei auf Platte, Gleitreibung sei nicht vernachlässigbar

Auf m wirken dann folgende Kräfte:

- Federkraft, $F_{Feder} = -c x$
- Gleitreibung, $|F_R| = mg \cdot \mu_G$



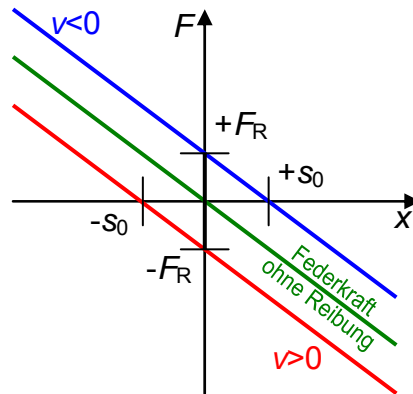
Die Gleitreibung ist vom Betrag her konstant, ändert aber ihre Richtung, wenn die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen wechselt:

$$F_R = + mg \cdot \mu_G \quad \text{für } v < 0$$

$$F_R = - mg \cdot \mu_G \quad \text{für } v > 0$$

res. Kraft: $F_{res} = -cx \pm |F_R|$

N. II \Rightarrow Dgl. : $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot x \pm |F_R|$



Die (konstante) Reibungskraft bewirkt lediglich eine Verschiebung der Kennlinie. Sie entspricht lediglich einer gewissen positiven bzw. negativen Vorspannung der Feder und damit also einer Verschiebung der Nulllage der Schwingung um $\pm s_0$. s_0 ergibt sich dabei aus dem Betrag der Reibungskraft und der Federkonstanten.

Bei **negativer Geschwindigkeit** ist z.B. die Reibungskraft **positiv**.

Bei der positiven Auslenkung $x = +|F_R|/c$ ist dann die Federkraft $F_{Feder} = -cx$ negativ und gleicht die Reibung gerade aus, so dass dort die Summe aller Kräfte Null ergibt. Für $v < 0$, also solange der Körper sich in negativer Richtung bewegt (unabhängig vom Vorzeichen von $x!$), ist die

Gleichgewichtslage deshalb verschoben um: $+s_0 = + \frac{|F_R|}{c}$ [Gl.4.1.29.]

Analog liegt bei **Bewegung in positiver Richtung** ($v > 0$) die Gleichgewichtslage bei $-s_0 = - \frac{|F_R|}{c}$

Für die Schwingungsfrequenz kommt es nur auf die Steilheit der Kraftkennlinie an. Eine Parallelverschiebung ändert daran nichts. Wir erwarten als Ergebnis also eine Schwingung mit unveränderter Frequenz, bei der die Nulllage bei jedem Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit (also bei jedem Umkehrpunkt) hin und her springt. Dies lässt sich auch rechnerisch zeigen:

Ausgehend von $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot (x \mp s_0)$ [Gl.4.1.30.]

erhält man durch die Substitution $x'(t) = x(t) \mp s_0$ (mit $\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$!)

die DGL $\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{c}{m} x' = 0$

Dies ist die DGL eines HO mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Die Nulllage liegt bei $x' = 0$. Also abhängig davon ob $v < 0$ oder $v > 0$ ist, ist die Nulllage bei $x = \pm s_0$!

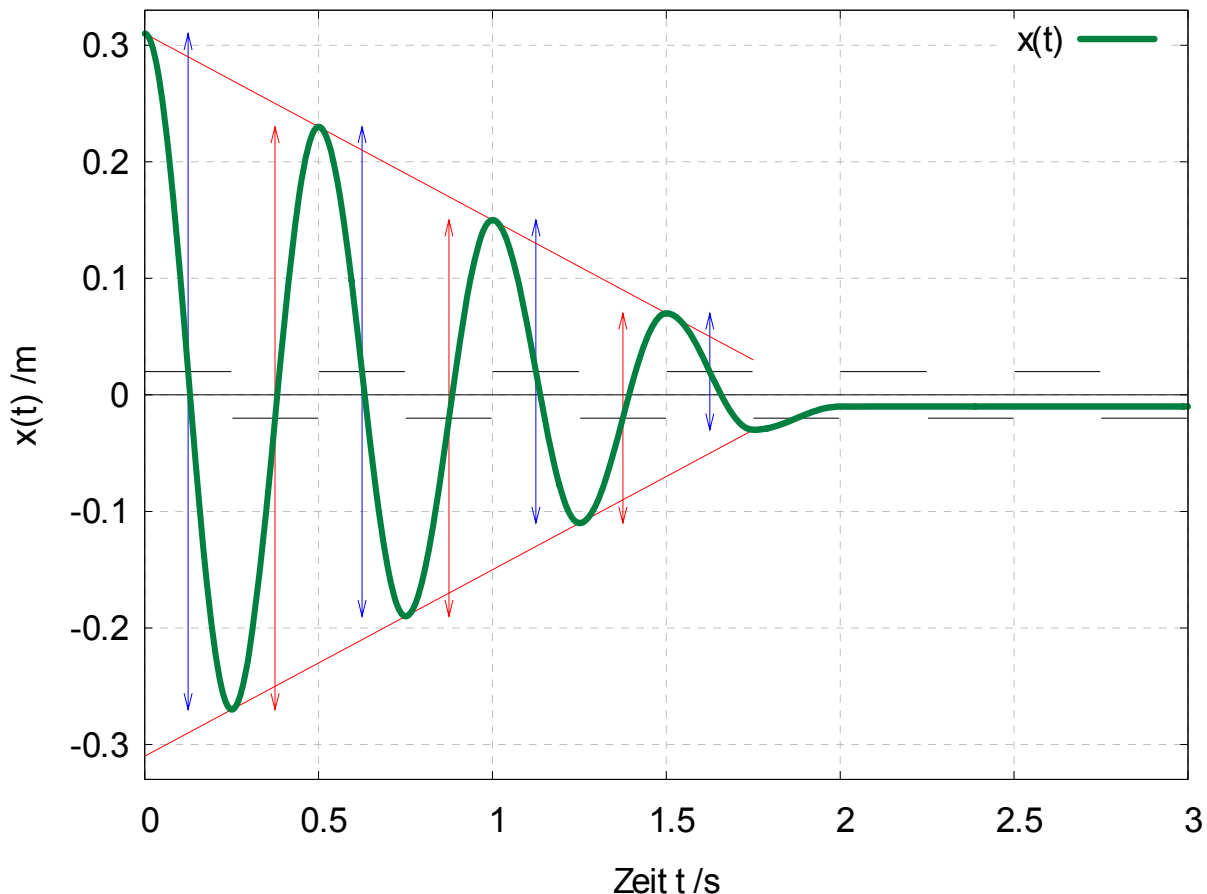
Am Umkehrpunkt wechselt die Geschwindigkeit das Vorzeichen. Die Schwingungsnulldage springt dann um $2 s_0$. Da die Bewegung $x(t)$ stetig sein muss, muss auch die Amplitude dann jeweils um $2 s_0$ kleiner werden. Aufeinanderfolgende Schwingungsamplituden bilden also eine arithmetische Reihe! Am Pohlschen Rad (Physikpraktikum!) können Sie diesen Effekt beobachten, wenn entweder die Wirbelstrombremse ausgeschaltet ist oder wenn die Schwingungsamplitude schon so klein ist, dass die Bremswirkung der Wirbelstrombremse gegenüber der Lagerreibung vernachlässigbar ist..

Spätestens wenn zum ersten Mal ein Umkehrpunkt im Bereich zwischen $+s_0$ und $-s_0$ erreicht wird, bleibt der Oszillator an dieser Stelle stehen! Dann reicht die Federkraft nicht mehr aus um die Gleitreibung zu überwinden. Mit Berücksichtigung der (noch größeren) Haftreibung wird er sogar noch früher „hängen bleiben“. Dies ist ein bei vielen Mess- oder Positioniersystemen sehr störender Effekt!

Beispiel ($x_0 = 0,31 \text{ m}$, $T = 0,5 \text{ s}$, $s_0 = 0,02 \text{ m}$)


(siehe Gnuplot-Datei „ho_reibung_v_unabhaengig.plt“ !)

Harmonischer Oszillator mit aeusserer Reibung



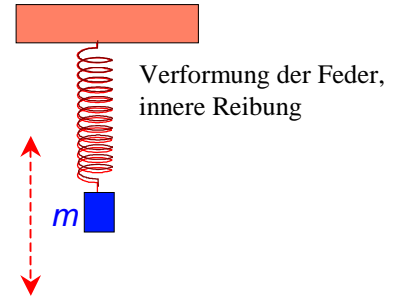
Die unterbrochenen horizontalen Linien geben die jeweilige Nulllage bei $\pm s_0$ an. Diese wechselt nach jeder halben Schwingungsdauer, d.h. hier nach $0,25 \text{ s}$.

Die **blauen Pfeile** zeigen die Amplitude für $v < 0$ (abfallende Kurvenstücke), die **roten Pfeile** für $v > 0$ (ansteigende Kurvenstücke)

 Was würde sich in obigem Diagramm ändern, wenn man die Haftreibung berücksichtigt und annimmt, dass die Haftreibung z.B. doppelt so groß wie die Gleitreibung ist ?

4.1.2.2 Geschwindigkeitsabhängige Reibung

Wir bleiben vorerst beim Beispiel Masse-Feder-Schwinger, verhindern nun aber Gleitreibung, indem wir den Körper an der Feder aufhängen. Selbst im Vakuum wird die Schwingung noch gedämpft werden, da bei der Verformung der metallischen Feder kinetische Energie in Wärme umgewandelt wird! Es wirkt jetzt eine zusätzliche Kraft, die „innere Reibung“. Diese zusätzliche Kraft tritt nur auf, solange der Körper sich bewegt. Sie ist von der Geschwindigkeit abhängig und kann in vielen Fällen als direkt proportional zur Geschwindigkeit angenommen werden.



Eine zur Geschwindigkeit proportionale Kraft ergibt sich nicht nur bei der Verformung eines Drahtes (Feder), sondern z.B. auch bei Reibung in zähen Flüssigkeiten („Viskosität“, siehe Kapitel Fluide!). Dies wird bei Dämpfungselementen (Stoßdämpfer) ausgenutzt. Auch Magnetfelder lassen sich nutzen, um eine zur Geschwindigkeit proportionale Kraft zu erhalten (**Wirbelstrombremse**). Bewegt sich ein Leiter durch ein Magnetfeld, so werden in ihm Wirbelströme induziert, auf die dann im Magnetfeld die Lorentzkraft wirkt. **Wirbelstrombremsen** werden beispielsweise bei diversen Sportgeräten, zur Schwingungsdämpfung in Zeigerinstrumenten oder in Stromzählern verwendet.

➤ Gedämpfter Feder-Masse-Schwinger:

Wir ergänzen das Feder-Masse-System deshalb noch um ein „Dämpfungselement k “.

Ansatz: Reibungskraft \sim Geschwindigkeit

$$F_R = -k \cdot \frac{dx}{dt}$$

Bedeutung des „-“ Zeichens:

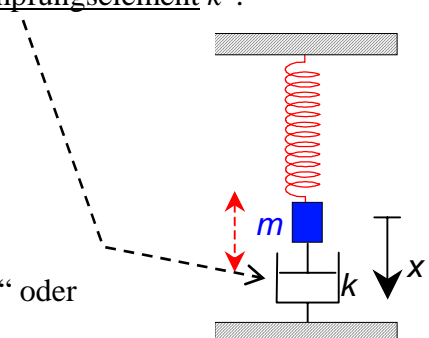
Die Reibungskraft ist der Geschwindigkeit entgegen gerichtet!

Die Proportionalitätskonstante k wird auch „Reibungskoeffizient“ oder „Dämpfungskoeffizient“ genannt.

Auf m wirken jetzt folgende Kräfte:

- Federkraft, $F_{Feder} = -cx$
- Reibung, $F_R = -k \cdot \frac{dx}{dt}$

[Gl.4.1.31.]



Damit ergibt sich die resultierende Kraft zu $F_{res} = -cx - k \cdot \frac{dx}{dt}$

Und aus dem II. Newtonschen Gesetz erhalten wir die DGL: $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - k \cdot \frac{dx}{dt}$ [Gl.4.1.32.]

Umformen auf „standard“ Form ergibt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$$

[Gl.4.1.33.]

c , k und m sind Größen, die noch von der speziellen Art des Oszillators abhängen (hier z.B. Masse-Feder-Schwinger...). Wie schon beim ungedämpften harmonischen Oszillator wollen wir versuchen, die Differentialgleichung so allgemein zu formulieren, dass sie von diesen speziellen Größen unabhängig ist. Dazu verwenden wir anstatt den „Systemeigenschaften“ c , k und m zwei

andere (allgemeinere) Konstanten (die für andere System anders berechnet werden müssen bzw. experimentell zu bestimmen sind). Die weitere Rechnung gilt dann nicht nur für den Masse - Feder-Schwinger, sondern für jeden gedämpften Oszillator, bei dem die Dämpfung durch einen Term $\sim \frac{dx}{dt}$ beschrieben wird.

		Einheiten:	
Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Oszillators:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$[\omega_0] = \frac{1}{s}$	[Gl.4.1.34.]
Abklingkoeffizient:	$\delta = \frac{k}{2m}$ (⁵)	$[\delta] = \frac{1}{s}$	[Gl.4.1.35.]

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich die ...

DGL des gedämpften HO: $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ [Gl.4.1.36.]

Der Unterschied zum ungedämpften harmonischen Oszillator (Gl.4.1.6.) ist also, dass jetzt ein Term mit der ersten Ableitung $\frac{dx}{dt}$ auftritt. Die Konstanten ω_0 und δ (beide haben die Einheiten 1/s !) lassen sich noch zu „dimensionslosen“ Kennzahlen des Oszillators kombinieren:

		Einheiten:	
Güte (Gütefaktor, Q-Wert) ⁶ Q	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$	1	[Gl.4.1.37.]
Verlustfaktor $d = 1/Q$	$d = \frac{2\delta}{\omega_0}$	1	[Gl.4.1.38.]
Dämpfungsgrad D	$D = \frac{\delta}{\omega_0}$	1	[Gl.4.1.39.]

☞ **Achtung** : verwechseln Sie nicht den Dämpfungsgrad D mit der Federkonstanten c (heißt in vielen Büchern, Aufgaben ... auch „ D “)

Da diese Größen keine Einheiten mehr haben eignen Sie sich besonders gut zur Charakterisierung der Dämpfung. Ein Oszillator der viele Schwingungen macht und bei dem dabei die Amplitude nur wenig abfällt hat eine große Güte ($Q \gg 1$) bzw. einen kleinen Dämpfungsgrad ($D \ll 1$).

Wir lösen die DGL Gl.4.1.36. mit Hilfe der **komplexen Schreibweise**. Dazu führen wir eine komplexe Funktion $z(t)$ ein, deren Realteil gerade die (physikalische, beobachtbare) Elongation des Oszillators ist: $x = \text{Re}(z)$ (vergl. Kap. 4.1.1.3, Seite 18):

⁵ Man hätte durchaus den Faktor $\frac{1}{2}$ weglassen und einfach k/m als neue Konstante definieren können (in manchen Büchern wird das so gemacht). Zwar wäre dann keine „2“ in der DGL, dafür würde aber ein zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ in der Lösung der DGL auftauchen.

⁶ Es gibt auch andere Definitionen der Güte Q , die vom Energieverlust pro Schwingung ausgehen (siehe Seite 32) und somit nur für schwache Dämpfung (Schwingfall) anwendbar sind. Wir verwenden hier die einfacher zu handhabende Definition $Q = \omega_0/(2\delta)$. Bei kleiner Dämpfung ($\delta \ll \omega_0$) stimmen die verschiedenen definierten Q -Werte überein.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad [\text{Gl.4.1.40.}]$$

Wir versuchen wieder, diese DGL. mit einer exp-Funktion $z(t) = \hat{Z} \cdot \exp(\lambda t)$ zu lösen, lassen aber zunächst offen, ob der Koeffizient λ reell, rein imaginär (wie beim ungedämpften HO) oder komplex ist. Auch der Vorfaktor \hat{Z} wird i.allg. komplex sein.

Ansatz: $z(t) = \hat{Z} \cdot e^{\lambda t}$ [Gl.4.1.41.]

Wir prüfen, ob dieser Ansatz die DGL. erfüllt ...

Differenzieren: $\frac{dz}{dt} = \lambda \cdot z(t)$, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda^2 \cdot z(t)$

Einsetzen: $\lambda^2 z + 2\delta \cdot \lambda \cdot z + \omega_0^2 z = 0$

oder: $(\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2) \cdot z(t) = 0$

Diese Gleichung muss für alle t (und damit für beliebige $z(t)$) erfüllt sein. Wir erhalten so die „**charakteristische Gleichung**“ der DGL:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad [\text{Gl.4.1.42.}]$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\lambda_{1(2)} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad [\text{Gl.4.1.43.}]$$

Der Ausdruck unter der Wurzel kann >0 , <0 oder $=0$ werden. Dementsprechend sind für $\delta \neq 0$ drei Fälle zu unterscheiden. Die Wurzel wird imaginär (a), reell (b) oder Null (c). Wir erhalten dann entweder zwei reelle Koeffizienten λ , ein Paar komplex konjugierte Koeffizienten λ oder eine „doppelte Nullstelle“ (die wir getrennt behandeln werden):

$\delta = 0$	keine Dämpfung	2 rein imag., kompl. conj. Lsg.	$\lambda_{1(2)} = \pm j\omega_0$	ungedämpfter HO
$\delta < \omega_0$	schwache Dämpfung	2 komplex conj. Lösungen	$\lambda_{1(2)} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	a) Schwingfall
$\delta > \omega_0$	starke Dämpfung	2 reelle Lösungen	$\lambda_{1(2)} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$	b) Kriechfall
$\delta = \omega_0$	Grenzfall	„doppelte Nullstelle“	$\lambda_{1(2)} = -\delta$	c) aperiodischer Grenzfall

a) Schwingfall

$$\delta < \omega_0$$

- Abklingkoeffizient δ ist in diesem Fall „klein“: $\delta < \omega_0$

Wir wissen bereits vom ungedämpften HO (Kap. 4.1.1.3, Seite 20) dass, wenn λ in den Ansatz $z(t) = \hat{Z} \cdot e^{\lambda t}$ eingesetzt wird, wegen $\lambda = \text{Re}(\lambda) + j \text{Im}(\lambda)$ der Imaginärteil von λ zu harmonischen Schwingungen der Form $\sim e^{j \text{Im}(\lambda) t}$ führt und dieser Imaginärteil die Kreisfrequenz der Schwingung

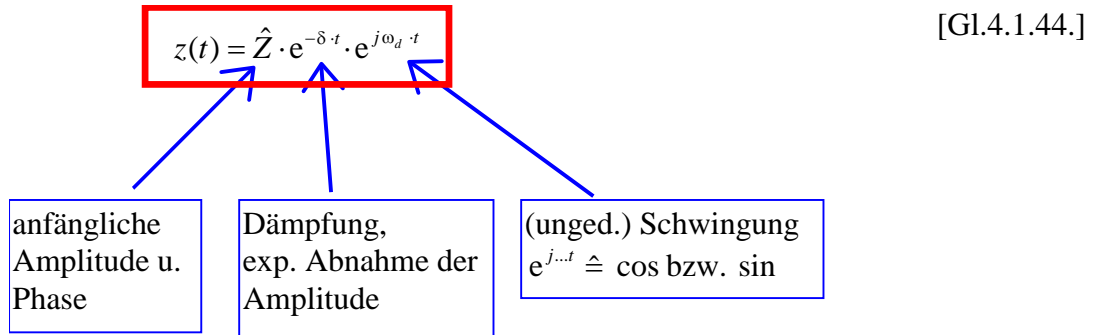
darstellt. Negative (Kreis-) Frequenzen⁷ interessieren uns hier nicht, darum können wir die zweite (komplex konjugierte) Lösung der quadratischen Gleichung Gl.4.1.42. ohne Verlust an Allgemeinheit weglassen.

Wir verwenden die Abkürzung $\omega_d = \text{Im}(\lambda) = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Damit ergibt sich nun die komplexe Lösung der DGL Gl.4.1.40. zu

$$z(t) = \hat{Z} \cdot e^{(-\delta + j\omega_d) \cdot t}$$

bzw.



Die „physikalische“ Bewegung des Körpers ergibt sich aus dem Realteil davon, $x(t) = \text{Re}(z(t))$. Für den Übergang zu reellen Größen schreiben wir den komplexen Vorfaktor \hat{Z} zunächst als Betrag mal Phasenfaktor: $\hat{Z} = |\hat{Z}| \cdot e^{j\varphi_0}$. Damit ergibt sich

$$\rightarrow z(t) = |\hat{Z}| \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{j\omega_d \cdot t}$$

$$z(t) = |\hat{Z}| \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \underbrace{e^{j(\omega_d \cdot t + \varphi_0)}}_{=\cos(\dots) + j\sin(\dots)}$$

Da jetzt nur noch die letzte exp-Funktion komplex ist, können wir den Realteil davon leicht mit Hilfe der Euler-Gleichung (Gl.4.1.22.) bestimmen:

$$\text{Re}(z(t)) = |\hat{Z}| \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi_0)$$

Wie im Fall der ungedämpften Schwingung (vergl. Seite 21) beschreibt das komplexe \hat{Z} also sowohl die Phasenlage der Schwingung als auch die Amplitude. Hier, bei der gedämpften Schwingung, ist $|\hat{Z}|$ allerdings genauer die **Amplitude bei $t = 0$** , da die Amplitude mit der Zeit ja wie $\sim e^{-\delta \cdot t}$ abnimmt. Wir schreiben für Amplitude bei $t = 0$ kurz $A_0 = |\hat{Z}|$. Die Amplitude als Funktion der Zeit und gleichzeitig die Einhüllende der Schwingungskurve ergibt sich dann zu $A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$

⁷ Eine negative Kreisfrequenz ändert bei einer cos-Schwingung gar nichts ($\cos(-\omega t) = \cos(+\omega t)$); bei einer sin-Schwingung ändert sich das Vorzeichen, was einer Phasenverschiebung von π entspricht ($\sin(-\omega t) = -\sin(+\omega t) = \sin(\omega t + \pi)$). Bei einer Schwingung mit beliebiger Phasenlage kann man „negative Frequenzen“ immer durch geeignete Wahl des Nullphasenwinkels vermeiden.

a) **Zusammenfassung SCHWINGFALL**

$$\delta < \omega_0$$

- Auslenkung: $x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi_0)$ [Gl.4.1.45.]
- Amplitude $A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ [Gl.4.1.46.]
- Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ [Gl.4.1.47.]
- 2 freie Parameter $\{A_0, \varphi_0\}$, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen!

Selbstverständlich kann die gedämpfte Schwingung (ebenso wie die ungedämpfte Schwingung) nicht nur mit einer Kosinus-Funktion beschrieben werden. Die Sinus-Funktion oder eine Überlagerung von Sinus und Kosinus sind völlig gleichwertige Varianten und ebenfalls Lösungen der DGL. Gl.4.1.36. Lediglich bei bestimmten Anfangsbedingungen kann es „praktischer“ sein, den sin oder den cos zu verwenden. Für $x(0)=0$ bietet es sich z.B. an, sin zu verwenden, da dann der Nullphasenwinkel wegfällt.

Achtung: Ein cos-Ansatz mit $\varphi_0 = 0$ bedeutet aber NICHT $v(0)=0$, denn auch der $e^{-\delta t}$ -Teil trägt zur 1. Ableitung bei!

- Schwingungskreisfrequenz ω_d

Der gedämpfte Oszillator schwingt wegen $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ mit einer etwas kleineren Frequenz (und entsprechend größerer Schwingungsdauer) als der ungedämpfte („Reibung bremst!“). Man bezeichnet üblicherweise die Kreisfrequenz einer gedämpften Schwingung mit ω_d , die Kreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung mit ω_0 . Natürlich gelten alle Umrechnungen zwischen Frequenz, Kreisfrequenz, Schwingungsdauer genauso für die gedämpfte Schwingung (vergl. Gl. Gl.4.1.9. - Gl.4.1.11.):

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}, \quad f_d = \frac{1}{T_d}, \quad \omega_d = 2\pi \cdot f_d \quad [\text{Gl.4.1.48.}]$$

Gl. Gl.4.1.47. lässt sich noch etwas anders darstellen:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad [\text{Gl.4.1.49.}]$$

(dabei ist D der Dämpfungsgrad, vergl. Gl.4.1.39.)

Somit gilt für die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$,

oder $T_d = \frac{T_0}{\sqrt{1 - D^2}}$ [Gl.4.1.50.]

Der Effekt der Frequenzverkleinerung bzw. Schwingungsdauerverlängerung durch die Dämpfung ist allerdings oft sehr klein bzw. vernachlässigbar. Für $\delta \ll \omega_0$ gilt wegen $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} : \omega_d \approx \omega_0$ und $T_d \approx T_0$

Beispiel: Es sei z.B. $\delta = 0,1 \cdot \omega_0$. Dann ist $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - (0,1)^2} = \omega_0 \sqrt{0,99} \approx 0,995 \cdot \omega_0$.

D.h. die Frequenz wird nur um 0,5 % kleiner, die Schwingungsdauer um 0,5 % größer.

➤ Amplitudenabnahme $\sim e^{-\delta \cdot t}$

Auf Grund der exponentiellen Amplitudenabnahme $A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ bilden die aufeinander folgenden Schwingungsmaxima $\hat{x}_n = \hat{x}_0 \cdot e^{-\delta \cdot n T_d}$ eine geometrische Reihe, d.h. die Amplitude nimmt in gleichen Zeiten immer um den gleichen Faktor ab.

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Maxima $\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+1}} = e^{+\delta \cdot T_d}$ heißt „(Schwingungs-) Dekrement“, meist wird der ln davon verwendet:

➤ **Logarithmisches Dekrement** $\Lambda = \ln\left(\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+1}}\right) = \delta \cdot T_d$ [Gl.4.1.51.]

Beispiel: Für $\delta = 0,1 \cdot \omega_0 = 0,1 \cdot \frac{2\pi}{T_0}$ ist $T_d \approx T_0$ (siehe oben), somit gilt $e^{+\delta \cdot T_d} \approx e^{+\delta \cdot T_0} = e^{+0,1 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_0}$.

Das logarithmische Dekrement ist hier also $\Lambda \approx 0,63$, die Schwingungsamplitude nimmt nach jeder Schwingung auf $\approx e^{-0,63} \approx 0,53$ ab. Nach 10 Schwingungen bleiben dann nur noch $\approx e^{-2\pi} \approx 0,2\%$ der Anfangsamplitude übrig.


Die exponentielle Abnahme der Amplituden lässt sich außer durch die Abklingkonstante δ auch durch ihren Kehrwert, die charakteristische Zeitkonstante oder Abklingzeit τ beschreiben:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

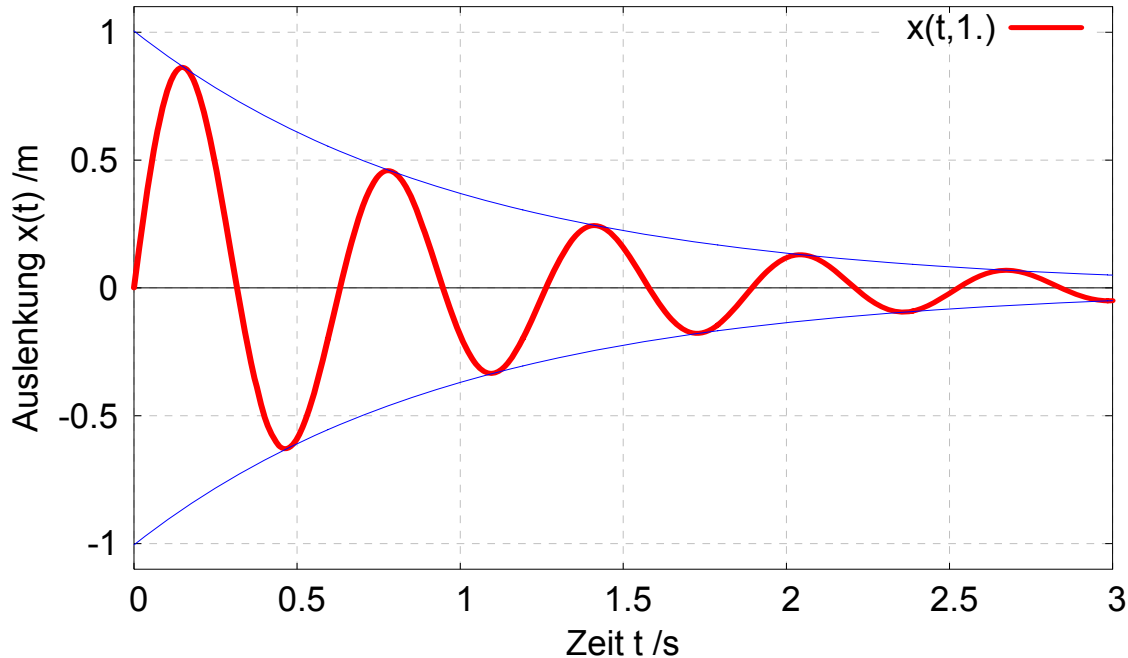
➤ **Abklingzeit** $\tau = \frac{1}{\delta}$ [Gl.4.1.52.]

Die Abklingzeit τ ist die Zeit, in der die Amplitude der gedämpften Schwingung auf $\frac{1}{e} \approx 0,3679$ abnimmt.

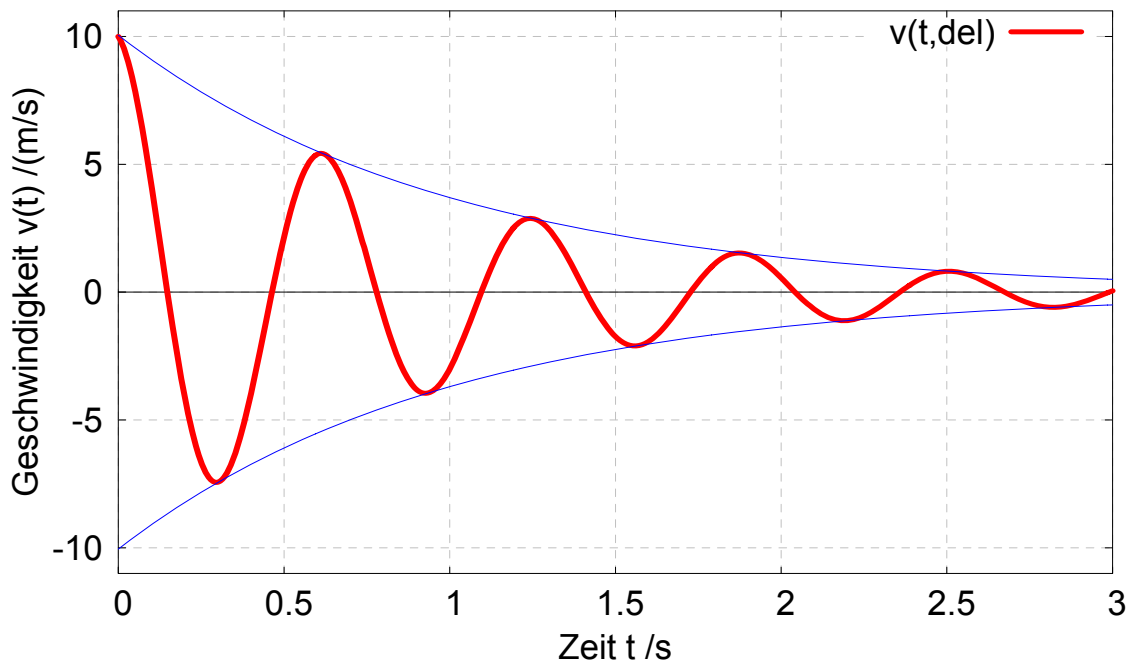
Beispiel: Oszillator mit $\omega_0 = 10 \text{ 1/s}$, $\delta = 1 \text{ 1/s}$,
Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$, $v(0) = 10 \text{ m/s}$

 **Übungsaufgabe:** Bestimmen Sie $x(t)$ und $v(t)$ für diese Anfangsbedingungen!


HARMONISCHER OSZILLATOR MIT DAEMPfung - SCHWINGFALL




HARMONISCHER OSZILLATOR MIT DAEMPfung - SCHWINGFALL



Diese Diagramme wurden mit Gnuplot und der Datei 'gedaempfer_oszillator_bsp_1.plt' erzeugt. Diese plt-Datei erzeugt auch die Diagramme mit $x(0) = 0$, $v(0) = 10 \text{ m/s}$ zum Kriechfall, aperiodischen Grenzfall und zur Energie beim gedämpften HO.

 **Übungsaufgabe:** Sie können sich diese Datei herunterladen, Parameter verändern, neue Diagramme hinzufügen etc. ...!

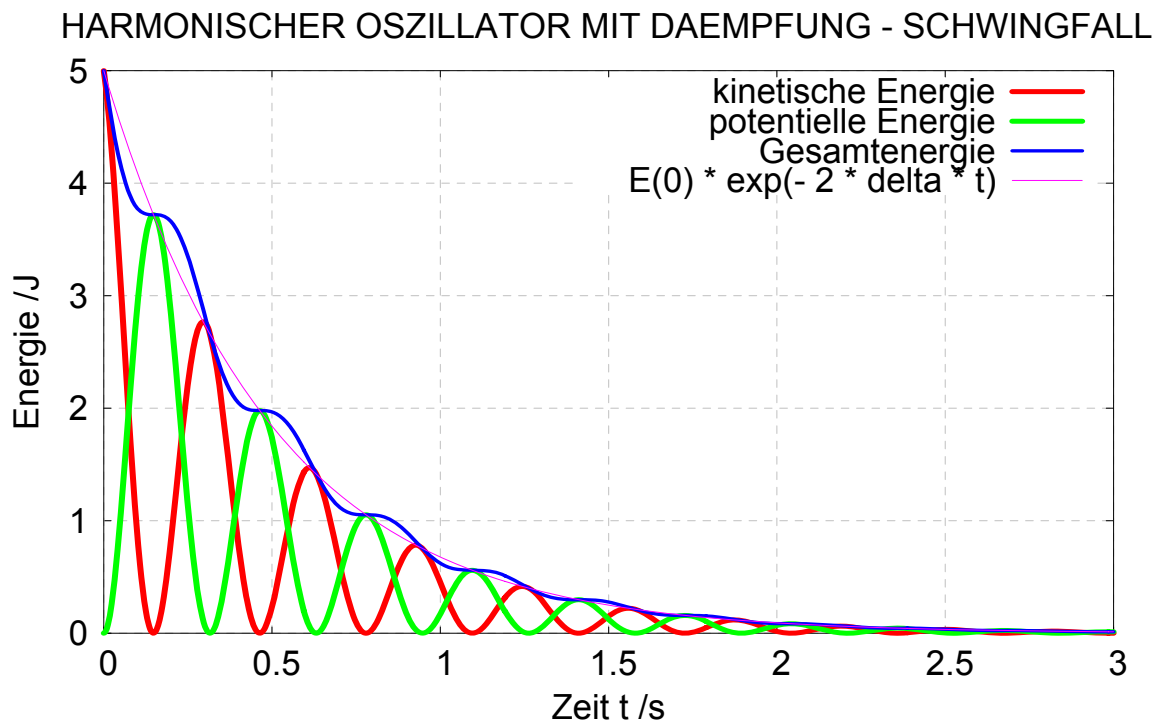
 **Übungsaufgabe:** Berechnen Sie für dieses Beispiel: $f_0, T_0, \omega_d, f_d, T_d$ (sowie die Unterschiede zwischen den entsprechenden Größen ohne bzw. mit Dämpfung), das log. Dekrement Λ , die Abklingzeit τ und die Zeit, bis die Amplitude auf 1 % des Anfangswerts abgeklungen ist!


➤ **Geschwindigkeit und Energie beim gedämpften Oszillator**

Aus $x(t)$ erhält man die **Geschwindigkeit** $v(t)$ als $v(t) = \frac{dx}{dt}$ (= ... Übungsaufgabe!).

Auch die Geschwindigkeit ergibt sich als harmonische Funktion mit einem Dämpfungsfaktor $e^{-\delta t}$ (siehe Diagramm oben!)

Sowohl die **kinetische Energie** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ als auch die **potentielle Energie** $E_{pot} = \frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ enthalten dagegen (wegen v^2 bzw. x^2 !) einen Faktor $e^{-2\delta t}$. Auch die **Gesamtenergie** nimmt damit \approx wie $e^{-2\delta t}$ ab, allerdings nicht gleichmäßig!



 Warum / wann gibt es im $E_{ges}(t)$ -Diagramm Punkte mit waagerechter Tangente?

.....

Wir kommen noch einmal auf die **Definition des Güte Q** zurück. Wir hatten (Gl.4.1.37.) die Definition $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ verwendet. Eine (vielleicht „*physikalischere*“) Variante definiert Q über den

$$\text{Energieverlust } \Delta E \text{ pro Schwingung: } Q = \frac{2\pi}{\frac{\Delta E}{E}} \quad [\text{Gl.4.1.53.}]$$

Dabei ist E die Gesamtenergie des Oszillators zum Zeitpunkt t und $\Delta E = E(t) - E(t+T_d)$ die Abnahme der Gesamtenergie innerhalb einer Schwingungsdauer. Da die Energie **quadratisch** von der Amplitude abhängt, $E \sim A^2$, gilt:

$$Q = \frac{2\pi \cdot E(t)}{E(t) - E(t+T_d)} = \frac{2\pi \cdot A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T_d)} = \frac{2\pi}{1 - \left(\frac{A(t+T_d)}{A(t)}\right)^2}$$

Wegen $A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ ergibt sich damit

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T_d}}$$

Im Falle **schwacher Dämpfung** ist nun $2\delta T_d \ll 1$ und - wie oben besprochen - $T_d \approx T_0$. Mit einer Näherungsformel für die exp-Funktion ($e^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ für $\varepsilon \ll 1$) erhält man somit:

$$Q \approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T_0)} = \frac{2\pi}{2\delta \cdot T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Dies entspricht unserer Definition der Güte in Gl.4.1.37.

b) Kriechfall

$$\delta > \omega_0$$

- Abklingkoeffizient δ ist in diesem Fall „groß“: $\delta > \omega_0$

Für diesen Fall erhalten wir zwei reelle Lösungen λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung Gl.4.1.42.:

$$\lambda_1 = -\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right), \quad \lambda_2 = -\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)$$

Beide Lösungen sind negativ, es ergeben sich also für unseren Ansatz $z(t) = \hat{Z} \cdot e^{\lambda t}$ in beiden Fällen reelle, abfallende Exp-Funktionen. Da im Exponent kein „*j*“ mehr auftritt gibt es keine Schwingung und keine Frequenz mehr. Insbesondere entfällt nun das beim Schwingfall benutzte Argument, dass wir auf „negative Frequenzen“ verzichten können.

Bei einer linearen homogenen DGL dürfen die Lösungen „überlagert“ werden:

$$\left. \begin{array}{l} z_1(t) \text{ erf. DGL} \\ z_2(t) \text{ erf. DGL} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(A_1 \cdot z_1(t) + A_2 \cdot z_2(t))}_{\text{erf. DGL}}$$

Jede Linearkombination von Lösungen der DGL ist wieder Lösung der DGL.!

Hier müssen wir die zwei verschiedenen Exponentialfunktionen überlagern, denn sonst hätten wir keine zwei freien Parameter mehr und könnten somit die Lösung nicht mehr an beliebige Anfangsbedingungen anpassen!

Da die Exp.-Funktionen im Kriechfall reell sind, könnten jetzt höchstens noch die Vorfaktoren (\hat{Z}) komplex sein. Da wir für die physikalisch interessante Lösung nur den Realteil benötigen, können wir auch gleich zum Realteil übergehen und die Vorfaktoren reell wählen.

Die allgemeine, reelle Lösung im Kriechfall ergibt sich dann zu

$$x(t) = a_1 \cdot e^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t} + a_2 \cdot e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t} \quad [\text{Gl.4.1.54.}]$$

Für die Klammern im Exponent (beide sind >0 !) werden meist Abkürzungen verwendet. Wir bezeichnen sie mit $\gamma_{1,2}$ ⁸: $\gamma_1 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, $\gamma_2 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

b) Zusammenfassung KRIECHFALL

$\delta > \omega_0$

- Auslenkung: $x(t) = a_1 e^{-\gamma_1 t} + a_2 e^{-\gamma_2 t}$ [Gl.4.1.55.]
- Mit den Koeffizienten $\gamma_1 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, $\gamma_2 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ [Gl.4.1.56.]
- Keine periodische Bewegung, keine Schwingung mehr!
- Überlagerung von zwei Exp-Funktionen, exponentielles „Zurückkriechen“ zur Ruhelage
- 2 freie Parameter $\{a_1, a_2\}$, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen!

Mit einer einzelnen exp-Funktion hätten wir nur einen freien Parameter. Geben wir dann z.B. $x(0) = x_0$ vor, so wäre die Funktion $x(t)$ dadurch vollständig bestimmt und auch die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ wäre damit festgelegt und könnte nicht mehr frei gewählt werden.

Als Überlagerung zweier fallender Exp-Funktionen hat $x(t)$ einige wichtige Eigenschaften, die Sie sich klar machen sollten.

- Für $t \rightarrow \infty$ geht $x(t)$ gegen Null!
- $x(t)$ hat höchstens eine Nullstelle!

Da sich auch $v(t) = \frac{dx}{dt}$ als Überlagerung zweier fallender Exp-Funktionen ergibt, gelten diese


Aussagen auch für $v(t)$!

- Für $t \rightarrow \infty$ geht $v(t)$ gegen Null!
- $v(t)$ hat höchstens eine Nullstelle, d.h. $x(t)$ hat höchstens ein Minimum oder Maximum!
- Nach einem Minimum oder Maximum hat $x(t)$ keine Nullstelle mehr!

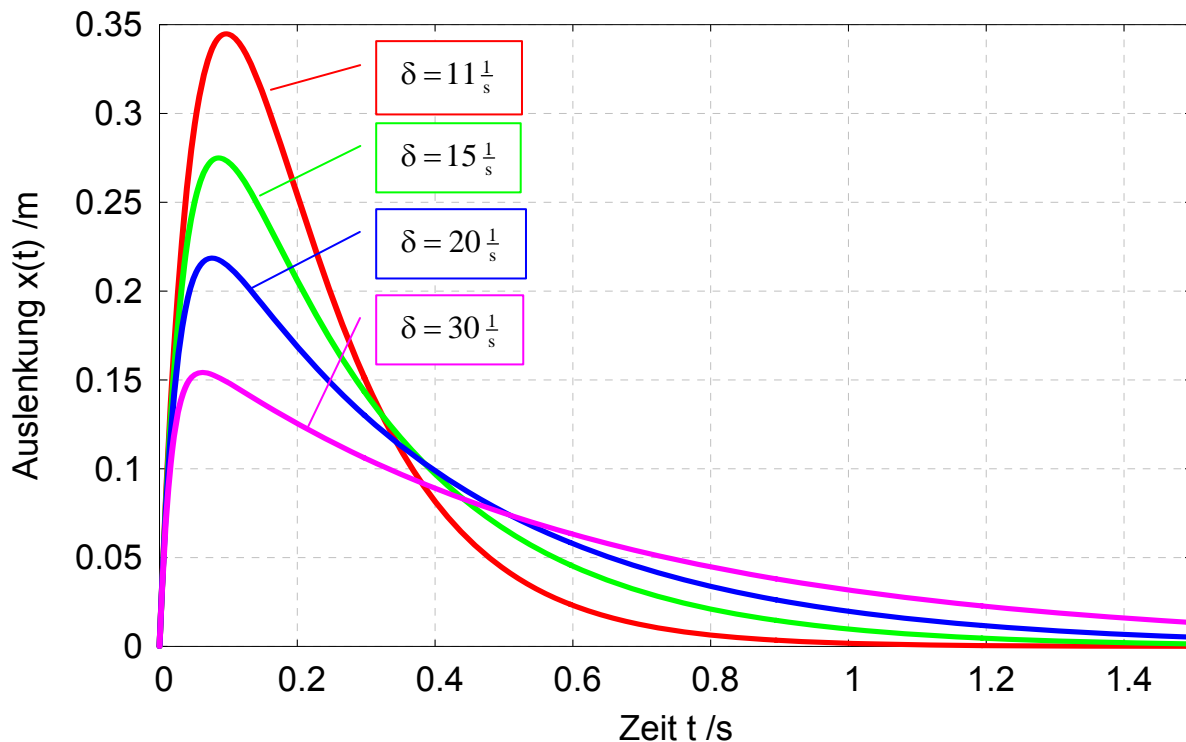
⁸ Gebräuchlich ist auch die Bezeichnung λ_1 u. λ_2 , die hier aber nicht verwendet werden kann, da λ_1 u. λ_2 bereits für die allg. Lösungen der charakteristischen Gleichung verwendet wurden. Aus praktischen Gründen wollen wir die Lsg. der DGL. aber mit positiven Koeffizienten schreiben. Im Kriechfall ist $\lambda_1 < 0$ u. $\lambda_2 < 0$, somit ist $\gamma_1 = -\lambda_1 > 0$ u. $\gamma_2 = -\lambda_2 > 0$!


Die letzte Aussage bedeutet: Lässt man den stark gedämpften Oszillator (Kriechfall!) aus der Ruhe los, so wird er ohne Vorzeichenwechsel in die Nulllage zurück „kriechen“. Stößt man ihn mit entsprechend großer Anfangsgeschwindigkeit in Richtung auf die Nulllage an, so kann man einen einzigen Nulldurchgang „erzwingen“, danach erreicht der Oszillator ein Minimum oder Maximum und „kriecht“ dann zur Nulllage zurück.

Beispiel: Oszillator mit $\omega_0 = 10 \text{ 1/s}$, $\delta > 10 \text{ 1/s}$,
Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$, $v(0) = 10 \text{ m/s}$

 **Übung:** Bestimmen Sie wieder (wie im Schwingfall) $x(t)$ und $v(t)$ für diese Anfangsbedingungen! Siehe auch: Gnuplot-Datei ‘gedaempfer_oszillator_bsp_1.plt’

HARMONISCHER OSZILLATOR MIT DAEMPfung - KRIECHFALL

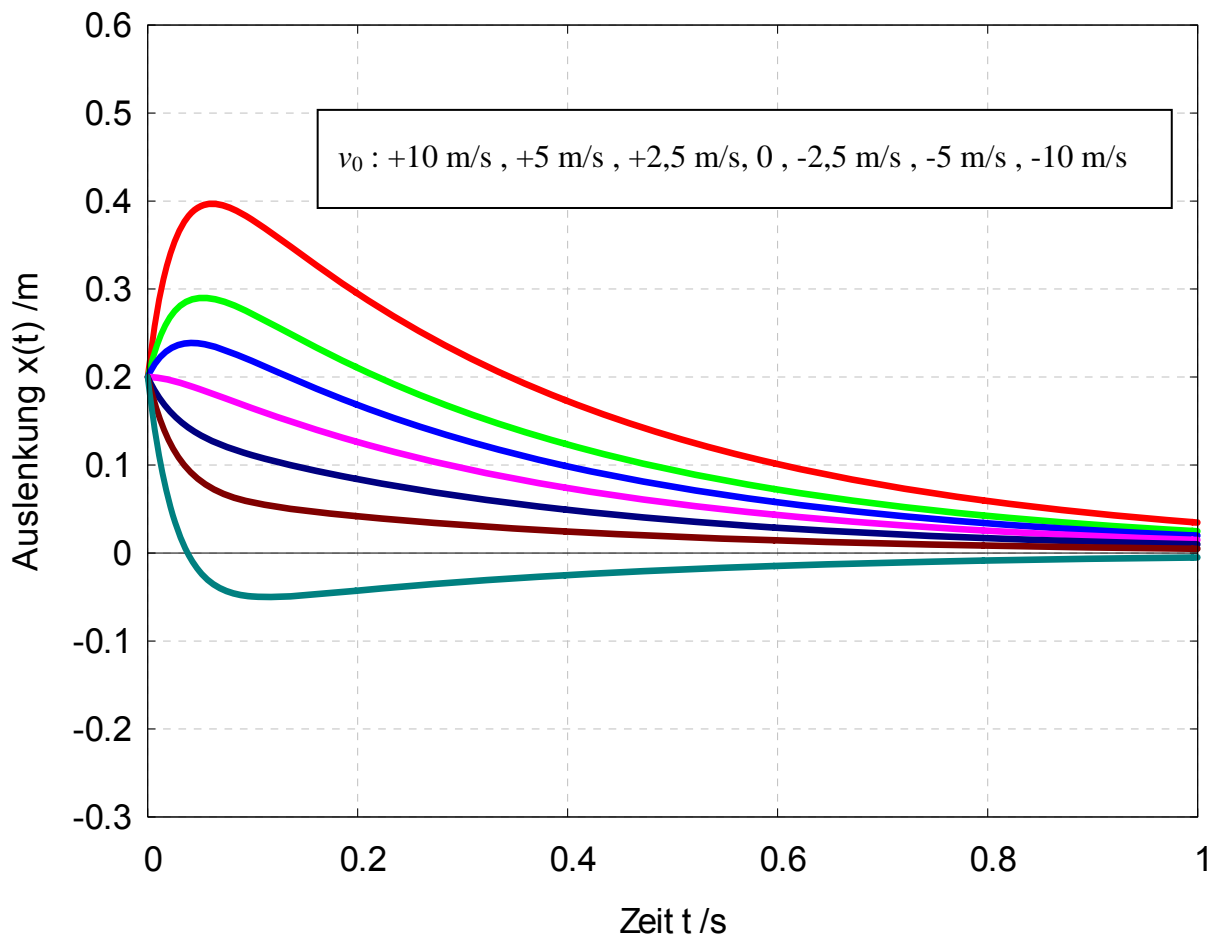


 **Übung** (siehe auch Gnuplot-Datei ‘gedaempfer_oszillator_bsp_2.plt’):

Drücken Sie die Koeffizienten (a_1, a_2) durch die Anfangsauslenkung $x(0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$ aus!

Bestimmen Sie $x(t)$ für $\omega_0 = 10 \text{ 1/s}$, $\delta = 20 \text{ 1/s}$, Anfangsbedingungen: $x(0) = 0,20 \text{ m}$, versch. $v(0) = v_0$ ($=0, >0, <0$)

HO mit Daempfung, Kriechfall mit versch Anfangsgeschwindigkeiten



c) Aperiodischer Grenzfall

$$\omega_0 = \delta$$

Der „aperiodische Grenzfall“ (ap. GF) liegt zwischen dem Schwingfall (Dämpfung „klein“, $\delta < \omega_0$) und dem Kriechfall (Dämpfung „groß“, $\delta > \omega_0$). Er ist deshalb von besonderer Bedeutung, weil ein System, das ungefähr so gedämpft ist, dass der aperiodische Grenzfall vorliegt, nach einer Störung besonders schnell in die Ruhelage zurück kehrt.

In der Messtechnik und Signalverarbeitung z.B. bedeutet zu starke Dämpfung (Kriechfall), dass ein Messsystem bei Veränderungen der Messgröße nur langsam zum neuen Endwert „kriecht“. Bei zu geringer Dämpfung dagegen reagiert das Messsystem mit Schwingungen („Überschwinger“). Besonders anschaulich ist dies an einem Zeigerinstrument zu sehen. Bei zu geringer Dämpfung schwingt der Zeiger um den neuen Anzeigewert herum, bei zu starker Dämpfung bewegt sich der Zeiger nur langsam und erreicht den neuen Wert nur asymptotisch. Häufig versucht man deshalb solche Systeme so zu dämpfen, dass ungefähr der aperiodische Grenzfall vorliegt! Auch

mechanische Systeme (Maschinen, Fahrzeuge, Brücken ...) brauchen häufig Dämpfungselemente („Stoßdämpfer“), um Schwingungen zu vermeiden oder schnell abklingen zu lassen. Auch hier wird man die Dämpfung häufig in der Nähe des aperiodischen Grenzfalls einstellen.

Wie sieht nun die allgemeine Gleichung der Auslenkung $x = x(t)$, d.h. die Lösung der DGL Gl.4.1.36. für den Fall $\omega_0 = \delta$ aus?

Wir hatten erhalten ...

für den Schwingfall : $x_{SF}(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi_0)$ mit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

für den Kriechfall: $x_{KF}(t) = a_1 e^{-\gamma_1 t} + a_2 e^{-\gamma_2 t}$ mit $\gamma_{1,2} = \delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Die Versuchung liegt jetzt nahe, für den ap. GF jetzt in diesen Gleichungen einfach $\omega_0 = \delta$ zu setzen. Wir machen dies versuchsweise, um zu sehen, dass wir dann ein Problem bekommen! Für $\omega_0 = \delta$ wird im Schwingfall $\omega_d = 0$ und im Kriechfall $\gamma_1 = \gamma_2 = \delta$. Wir erhalten damit

$$x_{SF}(t) = \underbrace{A_0 \cos(\varphi_0)}_{=\text{const.}!} \cdot e^{-\delta t} \quad \text{bzw.} \quad x_{KF}(t) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=\text{const.}!} \cdot e^{-\delta t} .$$

In beiden Fällen erhalten wir also eine Funktion „Konstante“ $\cdot e^{-\delta t}$, d.h. eine Funktion, die bei $t = 0$ mit bei einem bestimmten Wert anfängt, dort eine negative Anfangssteigung hat und dann monoton zur Nulllage geht. Mit nur einer Konstanten ist es aber nicht möglich, alle Anfangsbedingungen zu erfüllen.

Z.B. geht $x(0) = 0$ gar nicht, sonst wäre die Konstante Null u. die Funktion $x(t)$ identisch Null! ☹️
Ebenso wäre es unmöglich, das System mit einer Anfangsauslenkung $x(0) = x_0$, aber ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v(0) = 0$) los zu lassen. ☹️☹️☹️

Warum haben wir beim Einsetzen von $\omega_0 = \delta$ effektiv einen freien Parameter verloren? Die charakteristische Gleichung (Gl.4.1.42.) hat normalerweise zwei Lösungen, die dann auch zu zwei verschiedenen Lösungen der DGL führen. Dies sind

im Schwingfall: sin- und cos- Funktion mit exp.-Dämpfung
oder $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ mit komplex konjugierten $\lambda_{1,2}$
(die Überlagerung dieser Funktionen lässt sich dann auch als exp.-gedämpfte sin- oder cos-Funktion mit Phasenverschiebung darstellen)

im Kriechfall zwei exp-Funktionen mit verschiedenen Koeffizienten

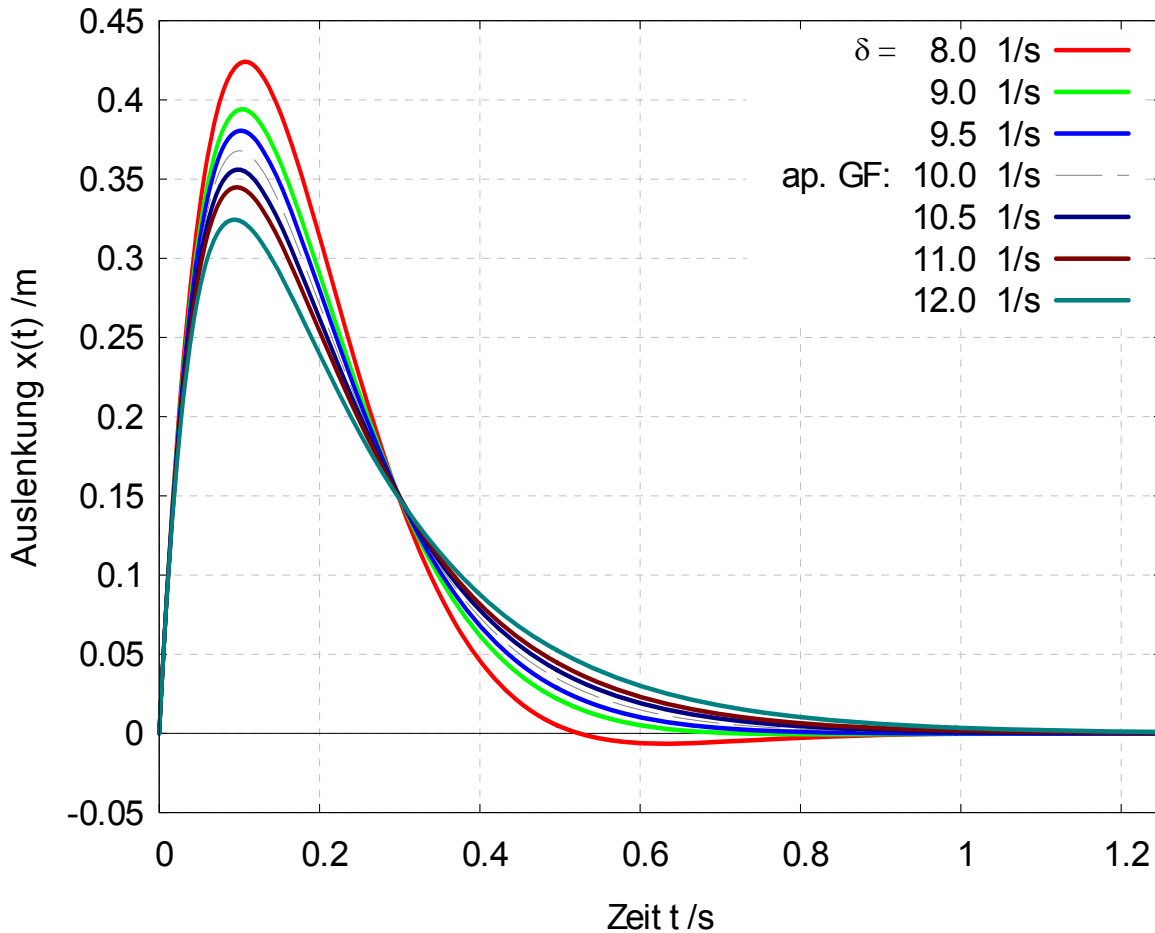
Beim aperiodischen Grenzfall ergibt sich nun eine „doppelte Nullstelle“ der charakteristischen Gleichung (Gl.4.1.42.) Dann muss es offensichtlich eine weitere Lösung der DGL. geben, die wir aber nicht erhalten, wenn wir wie oben einfach in der *allgemeinen Lösung* für den Schwing- oder Kriechfall $\omega_0 = \delta$ setzen!

Wir untersuchen deshalb die Lösung der DGL. im Kriech- und Schwingfall für spezielle Anfangsbedingungen: $x(0) = 0, v(0) = v_0 \neq 0$

Zunächst betrachten wir die Graphen der entsprechenden Funktionen für den Kriech- und den Schwingfall.

Übergang Schwingfall \Leftrightarrow Kriechfall am **Beispiel** $x(0) = 0, v(0) = 10 \text{ m/s}$
 $\omega_0 = 10 \text{ 1/s}, \delta = .8 \dots 12 \text{ 1/s}$

Übergang Schwingfall - aperiod. Grenzfall - Kriechfall



(erzeugt mit Hilfe der Gnuplot-Datei 'gedaempfer_oszillator_bsp_1.plt')

Die Formeln für den Kriech- und Schwingfall sind zwar verschieden, trotzdem fällt auf, dass ...

- die Graphen sich sehr ähneln
- es ohne weiters möglich wäre, die Kurve für den aperiodischen Grenzfall ($\delta = 10 \frac{1}{s}$) „von Hand“ zwischen den Kurven für $\delta = 9.5 \frac{1}{s}$ und $\delta = 10.5 \frac{1}{s}$ einzuzeichnen.
- in der Nähe des Grenzfalls der (für den Schwingfall typische) Vorzeichenwechsel bei $t = \frac{1}{2}T_d$ (vergl. Gl. Gl.4.1.50.) so weit nach hinten geschoben wird und dann bereits so stark gedämpft ist, dass er in der Grafik (z.B. für $\delta = 9.0 \frac{1}{s}$ und $\delta = 9.5 \frac{1}{s}$) nicht mehr zu erkennen ist.

Die Kurven im Schwingfall unterscheiden sich der Nähe des Grenzfalls praktisch nicht mehr vom Kriechfall! Es gibt mit wachsender Dämpfung also einen stetigen Übergang vom Schwingfall zum Kriechfall. Wir wollen diesen Übergang nun rechnerisch nachvollziehen.

1) Im Kriechfall ($\omega_0 < \delta$) erhält man dann (vergl. Übungsaufgabe beim Kriechfall!)

$$x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right) \quad \text{mit} \quad \gamma_{1,2} = \delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

(wg. $\gamma_2 > \gamma_1$ ist $e^{-\gamma_2 t} < e^{-\gamma_1 t}$ und damit für alle t $x(t) > 0$ falls $v_0 > 0$!)

Beim Übergang zum aperiodischen Grenzfall $\delta \rightarrow \omega_0$ ergibt sich jetzt

$$x(t) \rightarrow \frac{v_0}{2 \cdot 0} \cdot (0), \text{ also eine Division „Null durch Null“ ! } \bullet^{\infty}$$

Wir müssen also den Grenzwert für $\delta \rightarrow \omega_0$ berechnen. Wir setzen dazu zunächst $\gamma_{1,2}$ in $x(t)$

$$\text{ein:} \quad x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{-\delta t} \left(e^{+\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} - e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right)$$

Wenn $\delta \rightarrow \omega_0$ geht ist für jedes festes t irgendwann $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t \ll 1$ erfüllt.

Mit der Bezeichnung $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t = \varepsilon$ gilt dann $\varepsilon \ll 1$ und wir können die bereits früher benutzte Näherungsformeln⁹ für die exp-Funktionen anwenden:

$$e^\varepsilon - e^{-\varepsilon} \approx (1 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon) = 2 \cdot \varepsilon.$$

Somit erhält man

$$x(t) = \lim_{\delta \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{v_0 e^{-\delta t}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t \right\}$$

Die gegen Null strebenden Wurzeln im Zähler und Nenner kürzen sich jetzt weg und wir erhalten als Grenzwert für den aperiodischen Grenzfall die Funktion:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\delta t} \quad (\text{für } x(0) = 0, v(0) = v_0 \neq 0) \quad [\text{Gl.4.1.57.}]$$

2) Im Schwingfall $\omega_0 > \delta$ erhält man für die gleichen Anfangsbedingungen analog (vergl. Übungsaufgabe beim Schwingfall!):

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right)$$

Auch hier ergibt sich für $\delta \rightarrow \omega_0$ „Null durch Null“: $\frac{\sin(0)}{0}$

Mit $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t = \varepsilon \ll 1$ und $\sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$ erhält man jetzt

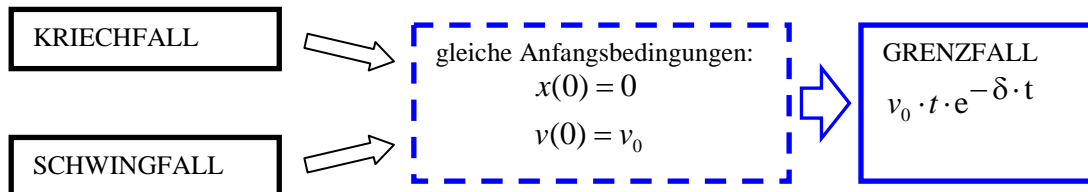
$$x(t) = \lim_{\delta \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t \right\} \quad \text{und (nach Kürzen) wieder den gleichen}$$

Grenzwert wie schon im Kriechfall:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\delta t} \quad (\text{für } x(0) = 0, v(0) = v_0 \neq 0)$$

⁹ Alternativ könnte man zur Berechnung des Grenzwertes auch die Regel von l'Hospital verwenden.

- Setzt man in die allgemeine Lösung des Schwing- oder Kriechfalls einfach $\omega_0 = \delta$, so erhält man NICHT die allgemeine Lösung des aperiodischen Grenzfalls. Vielmehr geht ein freier Parameter verloren und die so erhaltene Funktion beschreibt nur noch ganz spezielle Anfangsbedingungen!
- Setzt man in eine Lösung des Schwing- oder Kriechfalls für spezielle Anfangsbedingungen $\omega_0 = \delta$ so erhält man ein „Null durch Null“ – Problem. Durch Grenzübergang für $\delta \rightarrow \omega_0$ ergibt sich in beiden Fällen die gleiche, neue Funktion, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 0, v(0) = v_0 \neq 0$ richtig beschreibt.



➤ **Allg. Lösung für den aperiodischen Grenzfall** $\delta = \omega_0$:

Durch direktes Einsetzen in die Lsg. des Schwing- bzw. Kriechfalls ergab sich $x(t) \sim e^{-\delta \cdot t}$. Für spezielle Anfangsbedingungen erhielten wir oben die Funktion $\sim t \cdot e^{-\delta \cdot t}$. Wir machen deshalb den allgemeinen Ansatz, eine Überlagerung dieser zwei Funktionen:

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} + B \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$x(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Natürlich müssen wir nun noch prüfen, ob dieser Ansatz die DGL Gl.4.1.36. überhaupt erfüllt! Wir berechnen dazu die 1. und 2. Ableitung (wobei wir zur Abkürzung für die mehrfach auftretende Funktion $(A + B \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$ einfach wieder $x(t)$ schreiben):

$$\frac{dx}{dt} = -\delta \cdot (A + B \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} + B \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$= -\delta \cdot x(t) + B \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\delta \cdot (-\delta \cdot x(t) + B \cdot e^{-\delta \cdot t}) - \delta \cdot B \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$= \delta^2 x(t) - 2B\delta \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Einsetzen in DGL. (Gl.4.1.36.): $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ergibt dann:

$$\underbrace{\delta^2 x(t) - 2B\delta \cdot e^{-\delta \cdot t}}_{\frac{d^2x}{dt^2}} + 2\delta \cdot \underbrace{(-\delta \cdot x(t) + B \cdot e^{-\delta \cdot t})}_{\frac{dx}{dt}} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Nach Zusammenfassen ergibt sich:

$$\delta^2 x(t) - 2B\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} - 2\delta^2 x(t) + 2B\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega_0^2 - \delta^2) \cdot x(t) = 0$$

Wenn unser Ansatz die DGL lösen soll, dann muss diese Gleichung für beliebige t erfüllt sein. Da aber $x(t)$ für beliebige t nicht Null sein kann, muss der erste Faktor Null sein, d.h. $\omega_0 = \delta$!


- Der allgemeine Ansatz $(A + B \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$ ist Lösung der DGL wenn $\omega_0 = \delta$, d.h. genau im aperiodischen Grenzfall!

c) **Zusammenfassung APERIODISCHER GRENZ FALL**

$\delta = \omega_0$

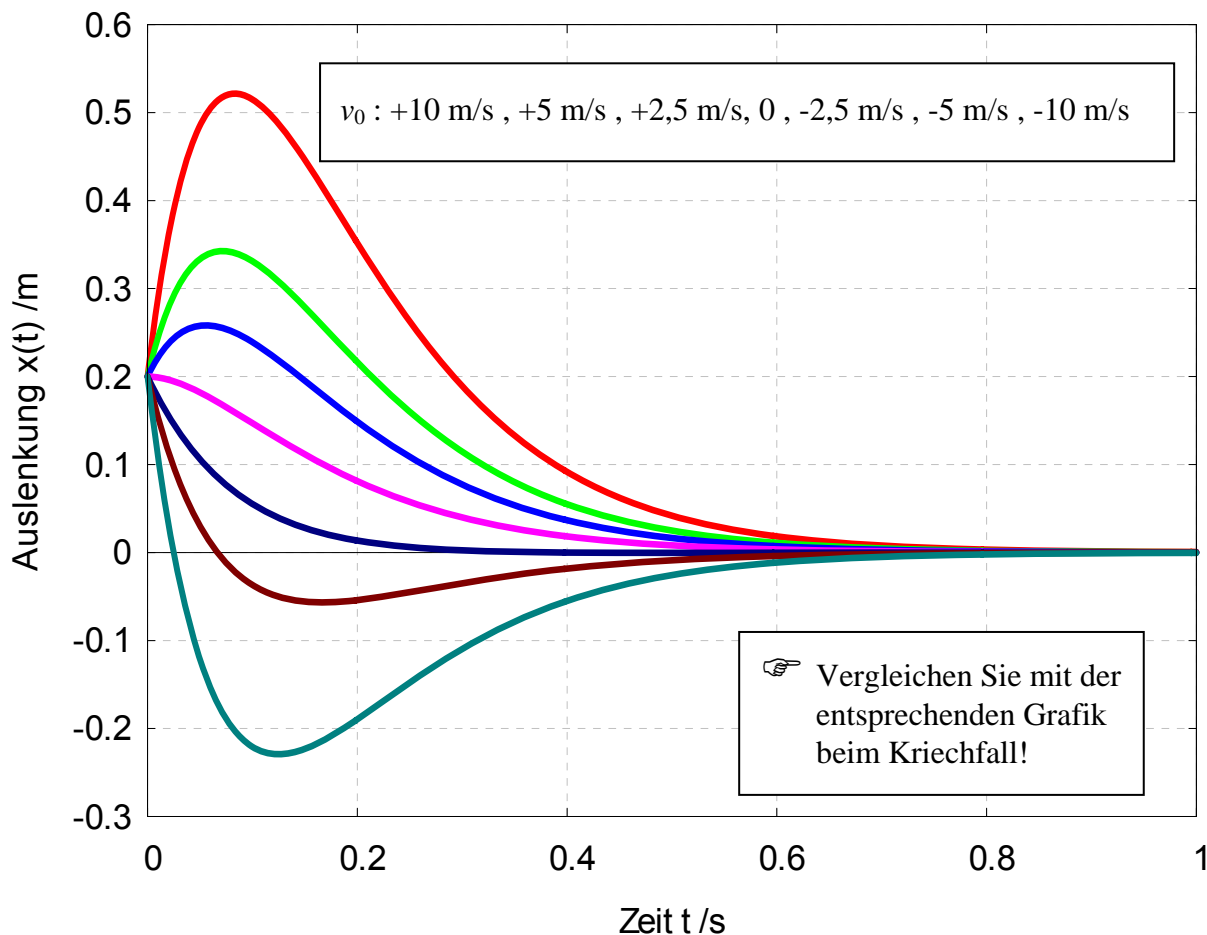
- Auslenkung: $x(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$ [Gl.4.1.58.]
Keine periodische Bewegung:
Dämpfung gerade so groß, dass keine Schwingung mehr auftritt!
- Schnellste Rückkehr zur Ruhelage
- 2 freie Parameter $\{A, B\}$, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen!

Hinweis: Die Koeffizienten A und B ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Für $t = 0$ ergibt sich wegen $x(0) = (A + B \cdot 0) \cdot e^{-\delta \cdot 0}$ einfach $x(0) = A$ und $v(0) = -\delta \cdot (A + B \cdot 0) \cdot e^{-\delta \cdot 0} + B \cdot e^{-\delta \cdot 0}$ bzw. $v(0) = -\delta \cdot A + B$. Für $A = 0$ ist $B = v(0)$, sonst nicht!

 **Übung** (siehe auch Gnuplot-Datei 'gedaempfer_oszillator_bsp_3.plt'):

Drücken Sie die Koeffizienten $\{A, B\}$ durch die Anfangsauslenkung $x(0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$ aus! Bestimmen Sie $x(t)$ für $\omega_0 = 10 \text{ 1/s}$, $\delta = 10 \text{ 1/s}$, Anfangsbedingungen: $x(0) = 0,20 \text{ m}$, versch. $v(0) = v_0$ ($=0, >0, <0$)

Aperiodischer Grenzfall mit versch. Anfangsgeschwindigkeiten



4.1.3 Erzwungene Schwingungen, Resonanz

Bisher hatten wir „freie Schwingungen“ betrachtet. Wir hatten dazu die Dynamik eines Systems mit

- Trägheit
- (lineare) Rückstellkraft *und*
- Reibung

untersucht Aus der Newtonschen Grundgleichung der Mechanik ($F = m \cdot a$) ergab sich eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungen $x(t)$ dieser DGL waren – abhängig von der Dämpfung– ungedämpfte oder gedämpfte harmonische Schwingungen bzw. aperiodische Bewegungen zurück zur Ruhelage (im Kriechfall bzw. aperiodischen Grenzfall). Wir haben auch gesehen, dass die Ergebnisse auch auf elektrische Schwingkreise übertragen werden können, da diese durch die gleiche DGL beschrieben werden.

Wir betrachten nun ein (als Beispiel mechanisches) schwingungsfähiges System, auf das zusätzlich zur linearen Rückstellkraft und Dämpfung noch eine weitere **äußere** Kraft $F(t)$ wirkt. Beispiele für solche System gibt es viele:

- Lautsprecher
- Mikrophon
- Trommelfell im Ohr
- Druck- oder Kraftsensor
- beliebiges elastisch gelagertes Teil im Auto
- federnd gelagerte Maschine mit „Unwucht“
- Maschinenteil, das von außen zu Schwingungen erregt wird
- KFZ-Teil (Auspuff, Innenspiegel, ...), wird durch Motor oder Unebenheiten der Straße erregt
- ...


Wir müssen nun Gl.4.1.32. um die äußere Kraft ergänzen und erhalten somit aus dem II. Newtonschen Gesetz, $m \cdot a = F_{res}$, die DGL.

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot x - k \cdot \frac{dx}{dt} + F(t)$$

Wir formen diese DGL um und führen wieder die Abkürzungen ω_0 und δ ein (siehe auch S. 25):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad [\text{Gl.4.1.59.}]$$

Dies ist eine **inhomogene** DGL, da die rechte Seite jetzt $\neq 0$ ist!

 **Übung:** $[x] = m$, bestimmen Sie die Einheiten der einzelnen Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung!

Für die Lösung der DGL brauchen wir ein paar einfache aber wichtige Regeln der Mathematik:

- Die verschiedenen Lösungen einer linearen **homogenen** DGL dürfen überlagert werden: „Superpositionsprinzip“ (beim gedämpften HO hatten wir z.B. beim Kriechfall 2 Lösungen überlagert)
- Jede beliebige Lösung $x_{\text{hom.}}(t)$ der **homogenen** DGL ($\dots = 0$) muss, wenn sie in die linke Seite der DGL eingesetzt wird, **NULL** ergeben!
- Eine Lösung $x(t)$ der **in homogenen** DGL muss

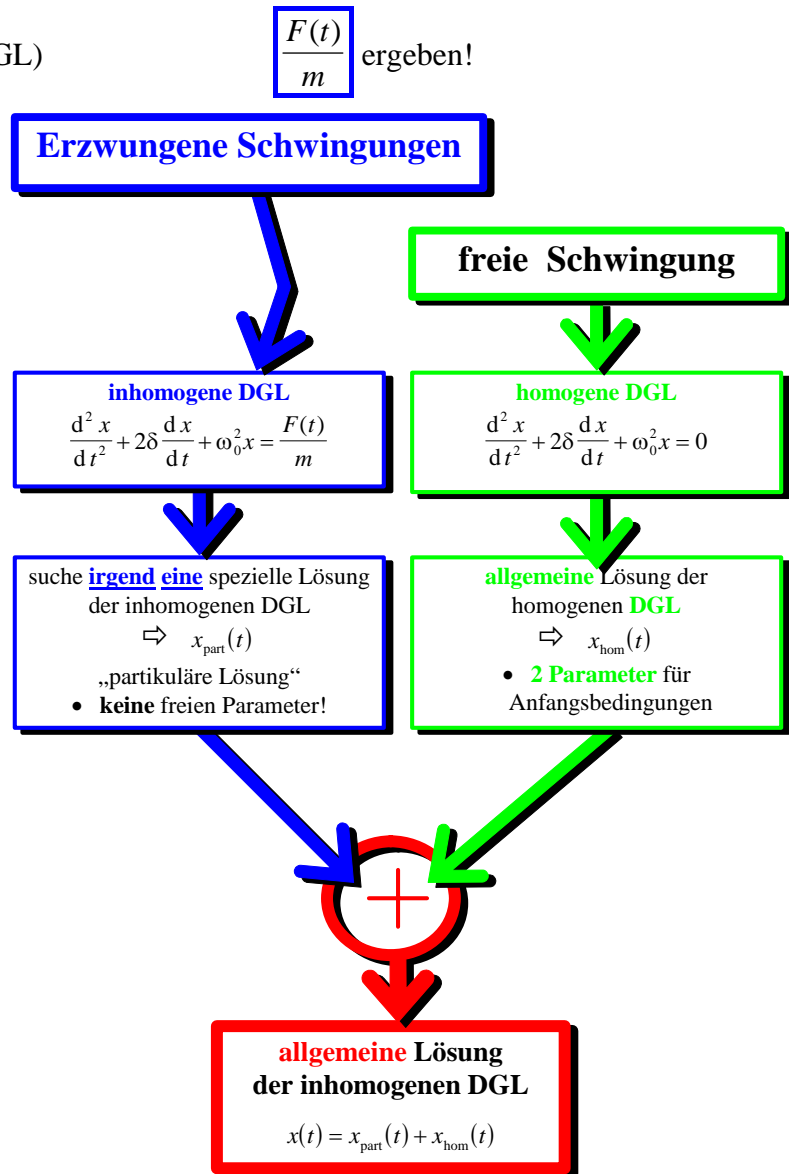
(eingesetzt in die linke Seite der DGL) $\frac{F(t)}{m}$ ergeben!

- Wenn wir – *woher auch immer* – eine spezielle Lösung $x_{\text{part.}}(t)$ der **in homogenen** DGL haben, so können wir zu dieser so genannten „**partikulären Lösung**“ jede beliebige Lösung $x_{\text{hom.}}(t)$ der **homogenen** DGL addieren. Da die Gleichung **linear** ist (auf der linken Seite sind alle Terme proportional zu x^I !), ist die Summe immer noch Lösung der **in homogenen** DGL.

Rechts wird dann zu $\frac{F(t)}{m}$ lediglich eine **Null** addiert wird:
 $\dots = \frac{F(t)}{m} + 0$ ergibt!

Die **allgemeine Lösung** der **in homogenen** DGL können wir dann zusammensetzen aus einer speziellen Lösung der **in homogenen** DGL plus der allgemeinen Lösung der **homogenen** DGL (für den Schwingfall, Kriechfall oder aperiodischen Grenzfall):
 $x_{\text{part.}} + x_{\text{hom.}}$!

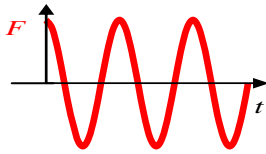
Da die allgemeine Lösung der **homogenen** DGL zwei freie Parameter „mitbringt“ können wir somit die Gesamtfunktion $x_{\text{part.}} + x_{\text{hom.}}$ an **beliebige Anfangsbedingungen** anpassen!



Wie aber finden wir die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ? Dazu muss zunächst die äußere Kraft $F(t)$ bekannt sein ...

Wichtigster Spezialfall:

„Harmonische“ äußere Kraft



Die Kraft schwankt sinus- bzw. cosinus-förmig mit der Erregerfrequenz f_E bzw. Erreger-Kreisfrequenz $\omega_E = 2\pi f_E$:

$$F(t) \sim \cos(\omega_E \cdot t) \quad [\text{Gl.4.1.60.}]$$

Die Kreisfrequenz ω_E ist hier vorgegeben. Sie ist kein freier Parameter und auch nicht durch die Eigenschaften des Oszillators bestimmt (beim Beispiel Lautsprecher ist dies die Frequenz des Wechselstroms, der vom Verstärker kommt).

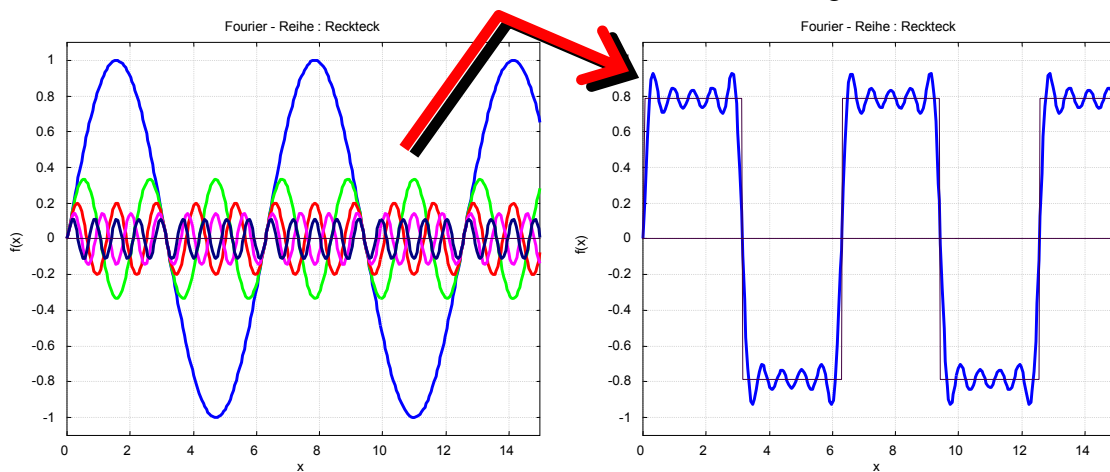
Warum gerade wieder eine harmonische Funktion ?

- Gute Näherung für viele Fälle, bei denen eine periodische äußere Kraft wirkt
- Rechnung ist einigermaßen einfach (wenn komplexe Zahlen verwendet werden)
- Beliebige periodische Funktionen lassen sich als Summe aus sin-/cos-Funktionen mit versch. Frequenzen darstellen (nichtperiodische Funktionen durch ein Integral über die kontinuierlich veränderliche Frequenz) ⇒ **Fouriersynthese!**

Bsp.: Synthese einer Rechteckfunktion durch die Summe

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots \quad [\text{Gl.4.1.61.}]$$

Siehe dazu auch Gnuplot-file „fourier_rechteck_saegezahn.plt“
(rekursiv definierte Fourier-Reihen für Rechteck und Sägezahn) !



- Wenn bekannt ist, mit welcher Amplitude und Phase ein System auf eine harmonische Anregung mit vorgegebener Frequenz reagiert, dann kann mit Hilfe des **Superpositionsprinzips** auch die Reaktion auf andere äußere Kräfte bestimmt werden. In der Mechatronik ist das umgekehrte Vorgehen von besonderer Bedeutung: Der zeitliche Verlauf der Erregerkraft wird so berechnet, dass ein schwingungsfähiges Bauteil (Beispiel: Spiegel für Laserstrahl) sich möglichst genau gemäß einer vorgegebenen Funktion der Zeit bewegt.

Wir verwenden für die „Harmonische“ äußere Kraft ($F(t) \sim \cos(\omega_E \cdot t)$) die **komplexe Schreibweise** (Rechnung ohne das Hilfsmittel komplexe Zahlen ist zwar möglich, aber viel komplizierter!):

$$F(t) = \hat{F} \cdot e^{j\omega_E \cdot t} \quad (\text{nur der Realteil}^{10} \text{ ist physikalischer von Bedeutung!})$$

Die zu lösende **inhomogene** DGL ist dann ...

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \cdot e^{j\omega_E \cdot t} \quad [\text{Gl.4.1.62.}]$$

Wir suchen nun eine beliebige Funktion $x_{part}(t)$, die diese DGL. löst! Um eine einfache Lösung zu finden, machen wir ein Experiment (z.B. Praktikum, Versuch S2, Pohlsches Rad) oder ein Gedankenexperiment ...

- Der Oszillator sei zu Anfang z.B. im Ruhezustand, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$
- Dann „schalten wir die Kraft an“; die äußere Kraft regt dann den Oszillator zu Schwingungen an.

Die äußere Kraft kann eine von der Eigenfrequenz des Oszillators völlig unterschiedliche Frequenz haben!

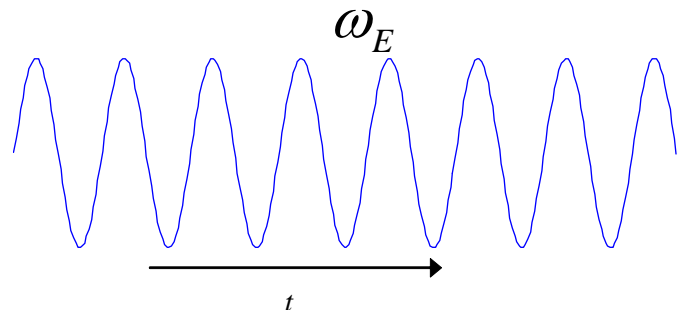
- Es wird sich zunächst ein (mehr oder weniger komplizierter) **Einschwingvorgang** ergeben, während dessen die dynamischen Eigenschaften des Oszillators und der (zeitliche) Verlauf der Erregerkraft und die speziellen Anfangsbedingungen eine wichtige Rolle spielen. Um diesen Einschwingvorgang vollständig zu beschreiben brauchen wir die (allgemeine) Lösung $x_{hom.}$ der homogenen DGL (denn diese hat die freien Parameter für die Anfangsbedingungen!)

... wenn wir aber l a n g e genug warten ... (bis die Einschwingvorgänge vorbei sind), dann

- ergibt sich ein stationärer („eingeschwungener“) Zustand. Die Bewegung mit der Eigenfrequenz des Oszillators ist dann auf Grund der Reibung abgeklungen ($x_{hom.}$ verschwindet für $t \rightarrow \infty$).

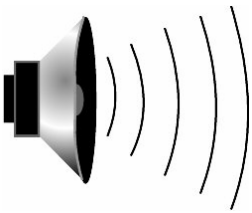
- Der Oszillator bewegt sich dann nur noch mit der (Kreis-) Frequenz der äußeren Erregerkraft (ω_E). Amplitude und Phase (relativ zur Erregerkraft) nehmen feste Werte an (diese müssen natürlich noch berechnet werden)!

⇒ eingeschwungener Zustand
stationäre Schwingung



¹⁰ Wir sparen uns ab jetzt die Unterscheidung zwischen komplexen Größen und reellen Größen und vereinbaren: $F(t)$ und $x(t)$ sind komplexe Funktionen, deren Realteil die physikalische Größen Kraft bzw. Auslenkung beschreiben!

Dies legt die Vermutung nahe, dass wir eine mögliche Lösung der DGL.4.1.62. erhalten, wenn wir für $x(t)$ harmonische Schwingungen mit der Erreger-Kreisfrequenz ω_E ansetzen (mit noch zu bestimmender Amplitude und Phasenlage).



Dies soll noch einmal kurz an einem anderen Beispiel verdeutlicht werden. Ein **Basslautsprecher** habe eine Eigenfrequenz von z.B. $f_0 = 100 \text{ Hz}$, $\omega_0 \approx 628 \text{ s}^{-1}$. Er sei stark bedämpft (z.B. mit $\delta = 314 \text{ s}^{-1}$). Wenn er nun durch einen kurzen Impuls aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, so wird er anschließend eine gedämpfte Schwingung (Schwingfall!) mit der Kreisfrequenz $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \dots \text{ s}^{-1}$, $f_d = \dots \text{ Hz}$ (~~na~~ Übung!)

ausführen. Die Amplitude dieser Schwingung nimmt gemäß $A(t) \sim e^{-\delta t}$ schnell ab, nach 0,01 s beträgt sie nur noch weniger als 5 % vom Anfangswert (~~na~~ Übungsaufgabe: nachrechnen!). Dies ist durchaus erwünscht ist, denn ein kurzer Ton soll ja nicht „ewig“ nachklingen. Wir geben jetzt aber auf diesen Lautsprecher ein Sinus-Dauer-Ton-Signal mit z.B. $f_E = 200 \text{ Hz}$. Nach maximal einigen hundertstel Sekunden wird sich der Lautsprecher dann auf die Erregerfrequenz von 200 Hz eingeschwungen haben. Seine Eigenfrequenz (100 Hz!) spielt nur für die freie, gedämpfte Schwingung (die Lösung der homogenen DGL) eine Rolle. Diese ist aber nach $\approx 0,01 \text{ s}$ (praktisch) abgeklungen. Nur diejenige Bewegung „überlebt“, die im Takt der Erregerfrequenz Energie nachgeliefert bekommt! Nach diesem Einschwingvorgang haben wir eine stationäre Schwingung mit der Erregerfrequenz von 200 Hz (und mit noch zu bestimmender Amplitude und Phasenlage)!

Wir machen deshalb folgenden

Ansatz zur Lösung der DGL. Gl.4.1.62.: $x(t) = \hat{Z} \cdot e^{j\omega_E t}$ [Gl.4.1.63.]

Dabei ist \hat{Z} eine (noch zu bestimmende!) komplexe Konstante¹¹. Aus \hat{Z} ergibt sich die Amplitude und die Phasenlage (relativ zur Erregerkraft) der Schwingung, was ersichtlich wird, wenn wir \hat{Z} als „Betrag * Phasenfaktor“ schreiben: $\hat{Z} = |\hat{Z}| \cdot e^{j\varphi}$

- $|\hat{Z}|$ (der Betrag von Z) ergibt die **Amplitude** der Schwingung
- φ (der Phasenwinkel in $e^{j\varphi}$) ergibt die **Phasenverschiebung**¹² zwischen Bewegung $x(t)$ und der Erregerkraft

➤ **Löst der Ansatz Gl.4.1.63. die DGL.4.1.62. ?**

Um zu prüfen, ob der Ansatz $x(t) = \hat{Z} \cdot e^{j\omega_E t}$ auch wirklich eine Lösung der DGL. ist, müssen wir ihn in die DGL. Gl.4.1.62. einsetzen. Wegen $\frac{dx(t)}{dt} = j\omega_E \cdot x(t)$ und $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = (j\omega_E)^2 \cdot x(t)$ erhalten wir dann:

$$-\omega_E^2 x + 2\delta j\omega_E x + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \cdot e^{j\omega_E t}$$

¹¹ „konstant“ bedeutet hier: unabhängig von der Zeit t !

¹² Beachten Sie die hier gewählte Vorzeichenkonvention: Die Ursache (Erregerkraft) wurde mit Phase 0 vorgegeben ($F(t) \sim \cos(\omega_E \cdot t)$). Die Wirkung (Bewegung des Körpers $x(t)$) wird berechnet und ist gegenüber $F(t)$ um φ phasenverschoben. Da die Bewegung der Erregung zeitlich nachhinkt, ist $\varphi \leq 0$.

In manchen Büchern wird die Phasenverschiebung dagegen bei der „Ursache“ $F(t)$ angesetzt, dann ist $\varphi \geq 0$!

$$(-\omega_E^2 + 2j\delta\omega_E + \omega_0^2) \cdot \hat{Z} \cdot e^{j\omega_E t} = \frac{\hat{F}}{m} \cdot e^{j\omega_E t}$$

Diese Gleichung muss wieder für beliebige t gelten, also kann man $e^{j\omega_E t}$ kürzen und erhält...

$$\hat{Z} = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + j(2\delta\omega_E)} \quad [\text{Gl.4.1.64.}]$$

Die Konstante \hat{Z} hängt also von der Erreger-Kreisfrequenz ω_E ab, sie ist also eine **komplexe Funktion** der Erreger-Kreisfrequenz ω_E : $\hat{Z} = \hat{Z}(\omega_E)$.

- Eine **harmonische Schwingung** mit der Frequenz der Erregerkraft (Ansatz gem. Gl.4.1.63.) ist eine Lösung der DGL Gl.4.1.62. Diese Lösung beschreibt die stationäre Schwingung nachdem der Einschwingvorgang abgeschlossen ist.
- Aus der komplexen Größe $\hat{Z} = \hat{Z}(\omega_E)$ (Gl.4.1.64.) ergibt sich als Funktion der Erregerfrequenz die **Amplitude** der Schwingung sowie die **Phasenverschiebung** gegenüber der Erregerkraft.

➤ **Statische und quasistationäre Anregung:**


Setzen wir die Erregerfrequenz zu Null, so ergibt sich $\hat{Z}(0)$ als eine rein reelle Größe, die statische Auslenkung:

$$\hat{Z}(0) = \frac{\hat{F}}{m\omega_0^2} \quad [\text{Gl.4.1.65.}]$$

Wegen $\omega_0^2 = c/m$ können wir dies umschreiben zu $\hat{Z}(0) = \hat{F}/c$ und sehen daran, dass $\hat{Z}(0)$ tatsächlich nichts anderes ist als die Auslenkung, die wir erhalten, wenn wir mit der Kraft \hat{F} statisch an der Feder mit der Federhärte c ziehen!

- Bei **sehr kleiner Erregerfrequenz** ($\omega_E \ll \omega_0$, „**quasistationäre Anregung**“) erhält eine langsame Schwingung mit der Amplitude $\hat{Z}(\omega_E) \approx \hat{Z}(0)$. Die Amplitude ist also so groß wie die statische Auslenkung des Systems mit der Kraft \hat{F} . Dabei folgt der Oszillator ohne Phasenverschiebung der Erregerkraft.

Somit wird verständlich, dass \hat{Z} in diesem Fall keinen (bzw. nur einen vernachlässigbaren) Imaginärteil haben kann.

-  **Übung:** Zahlenbeispiel $m = 10 \text{ g}$, $c = 3948 \text{ N/m}$, $\hat{F} = 10 \text{ N}$. Berechnen Sie ω_0 , f_0 , und $\hat{Z}(0)$! Für $f_E = 1 \text{ Hz}$ und $\delta = 314 \text{ s}^{-1}$ berechnen Sie ω_E , $\hat{Z}(\omega_E)$ (komplex!) sowie Betrag, Realteil, Imaginärteil und Phasenwinkel von $\hat{Z}(\omega_E)$!

Diskussion der komplexen Resonanzfunktion $\hat{Z}(\omega_E)$

Mit Gl.4.1.65. können wir die Funktion $\hat{Z} = \hat{Z}(\omega_E)$ (Gl.4.1.64.) noch etwas umschreiben und erhalten:

$$\hat{Z}(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + j(2\delta\omega_E)} \quad [\text{Gl.4.1.66.}]$$

Bevor wir zu Betrag (Amplitude der Schwingung) und Phasenwinkel (Phasenverschiebung zwischen Kraft und Auslenkung) übergehen, wollen wir uns diese komplexe Funktion noch etwas genauer ansehen. Aus dieser Funktion kann man nämlich bereits viele wichtigen Eigenschaften der erzwungenen Schwingung bzw. der Resonanzschwingung erkennen. Wir machen dazu noch den Nenner reell (erweitern mit komplex konjugiertem Nenner) und können dann der Real- und den Imaginärteil von \hat{Z} einfacher bestimmen:

$$\hat{Z}(\omega_E) = \frac{\hat{Z}(0) \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega_E^2 - j(2\delta\omega_E)) \quad [\text{Gl.4.1.67.}]$$

$$\text{Re}(\hat{Z}(\omega_E)) = \frac{\hat{Z}(0) \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega_E^2) \quad \text{Im}(\hat{Z}(\omega_E)) = \frac{\hat{Z}(0) \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \cdot (-2\delta\omega_E)$$

In dieser Form kann man nun erkennen ...

- Für $\omega_E = 0$ verschwindet der Imaginärteil *Quasistationäre Anregung, die Auslenkung folgt ohne Phasenverschiebung der Erregerkraft* und der Realteil ist positiv
- Für $\omega_E > 0$ ist der Imaginärteil stets negativ, deshalb ist auch der Phasenwinkel negativ *Negativer Phasenwinkel bedeutet hier, dass die Auslenkung gegenüber der Kraft zeitlich verzögert ist (Wirkung kommt nach der Ursache !)*
- der Realteil ist *Die Phasenverschiebung zwischen Erregerkraft und Auslenkung wird mit steigender Erregerfrequenz (betragsmäßig) größer. Wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ist, ergibt sich immer (-) 90°, (Realteil= 0!), bei höheren Frequenzen wächst die Phasenverschiebung bis auf (-) 180° an (Realteil wird negativ)*
 - positiv** für $0 < \omega_E < \omega_0$
 - Null** für $\omega_E = \omega_0$
 - negativ** für $\omega_0 < \omega_E$

Dieses Verhalten lässt sich auch anschaulich verstehen:

- Bei niedriger Frequenz sind **Kraft** und **Auslenkung** in Phase.
Die **Geschwindigkeit** hat ihr Maximum wenn die **Auslenkung** durch Null geht. Dagegen ist die **Geschwindigkeit** Null, wenn die **Auslenkung** maximal/minimal ist. Deshalb besteht zwischen **Geschwindigkeit** und **Auslenkung** bei einer harmonischen Schwingung immer ein Phasenunterschied von 90° ($\sin \Leftrightarrow \cos$). Bei niedriger Erregerfrequenz ist deshalb auch zwischen **Kraft** und **Geschwindigkeit** der Phasenunterschied 90° .
- Bei immer größer werdender Erregerfrequenz hinkt nun die **Bewegung des Systems** immer mehr hinter der Erregerkraft her (Trägheit!). Bei der Eigenfrequenz des Oszillators werden schließlich 90° Phasenunterschied zwischen **Kraft** und **Auslenkung** erreicht. Dann sind aber **Kraft** und **Geschwindigkeit** in Phase.
- Leistung ergibt sich aus dem Produkt **Kraft** * **Geschwindigkeit**, $P = F \cdot v$. Bei $\omega_E = \omega_0$ sind **Kraft** und **Geschwindigkeit** in Phase und die übertragene **Leistung wird maximal!**
- Bei noch höherer Erregerfrequenz wird die Phasenverschiebung noch größer, die auf das System übertragenen Leistung nimmt wieder ab und die Amplitude sinkt. Bei sehr großer Erregerfrequenz schwingen Auslenkung und Kraft „im Gegentakt“ (180° Phasenverschiebung) und die Amplitude wird sehr klein.

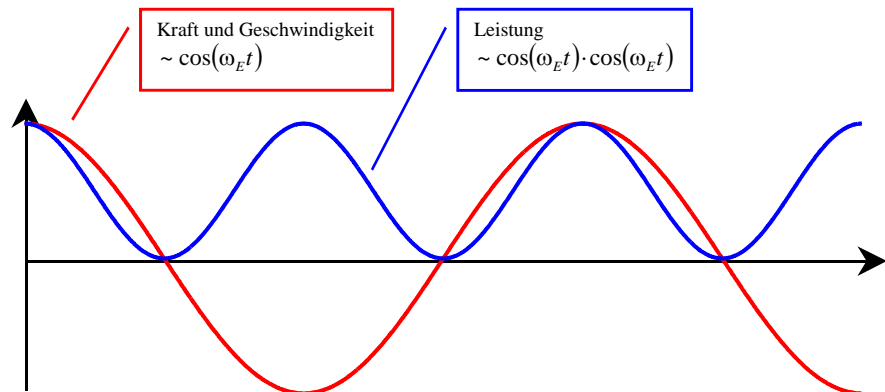
Die Verhältnisse sind völlig analog zu denen in elektrischen Wechselstromkreisen.

Sind ...

Spannung und **Strom**

in Phase, also z.B. beide \cos -Schwingungen, so ergibt sich eine stets **positive** („-“ * „-“ bzw. „+“ * „+“) **Leistung** (**Wirkleistung**), die auf das System übertragen wird.

Kraft und **Geschwindigkeit**



Sind die beiden Größen dagegen um 90° phasenverschoben, also z.B.

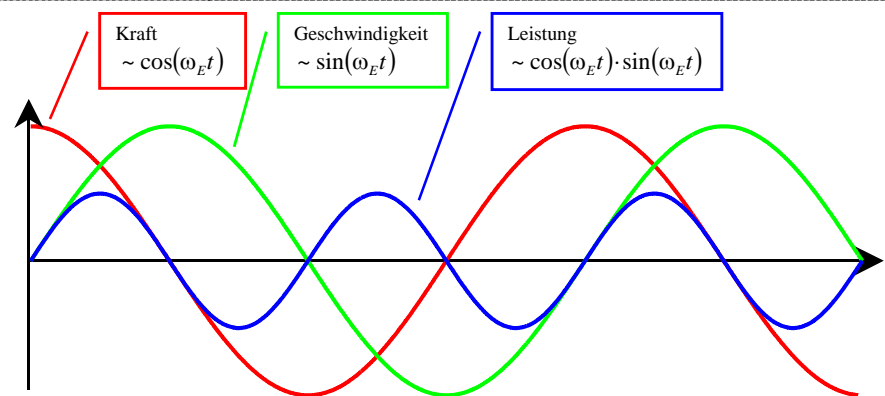
Spannung $\sim \cos(\omega_E t)$

Strom $\sim \sin(\omega_E t)$

Kraft $\sim \cos(\omega_E t)$

Geschwindigkeit $\sim \sin(\omega_E t)$

so wechselt nach jeder Viertelschwingung eine der beiden Größen das Vorzeichen. Die **Leistung** (Produkt der zwei phasenverschobenen Schwingungen) wird damit abwechselnd positiv und negativ (**Blindleistung**), d.h. Energie fließt abwechselnd ins System hinein / heraus.



Da durch die Dämpfungskraft ständig Energie in Wärme umgewandelt wird, erhalten wir nur dann eine große Amplitude, wenn dem Oszillator regelmäßig Energie zugeführt wird. Auf Grund der Phasenverschiebung zwischen Kraft und Geschwindigkeit ergibt sich sowohl bei sehr kleiner als auch bei sehr großer Erregerfrequenz keine große Energiezufuhr und deshalb auch keine besonders große Schwingungsamplitude. Nur in der Nähe der Eigenfrequenz des Oszillators wirkt die Erregerkraft genau im richtigen Rhythmus. Die **Kraft** ist dann in Phase mit der **Geschwindigkeit** und somit wird „**Wirkleistung**“ auf das System übertragen. Die Amplitude wird sich dann so einstellen, dass sich ein Gleichgewicht zwischen Energiezufuhr durch die Erregerkraft und Energiedissipation durch die Dämpfungskraft ausbildet.

In den nachfolgenden Diagrammen ist $\hat{Z}(\omega_E)$ für verschieden starke Dämpfungen (Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega_0}$) dargestellt

- $\hat{Z}(\omega_E)$ in der komplexen Zahlenebene $\text{Im}(\hat{Z}) - \text{Re}(\hat{Z})$ („Ortskurve“)
- $\text{Im}(\hat{Z}), \text{Re}(\hat{Z}), |\hat{Z}|$ als Funktion der Erreger-Kreisfrequenz ω_E

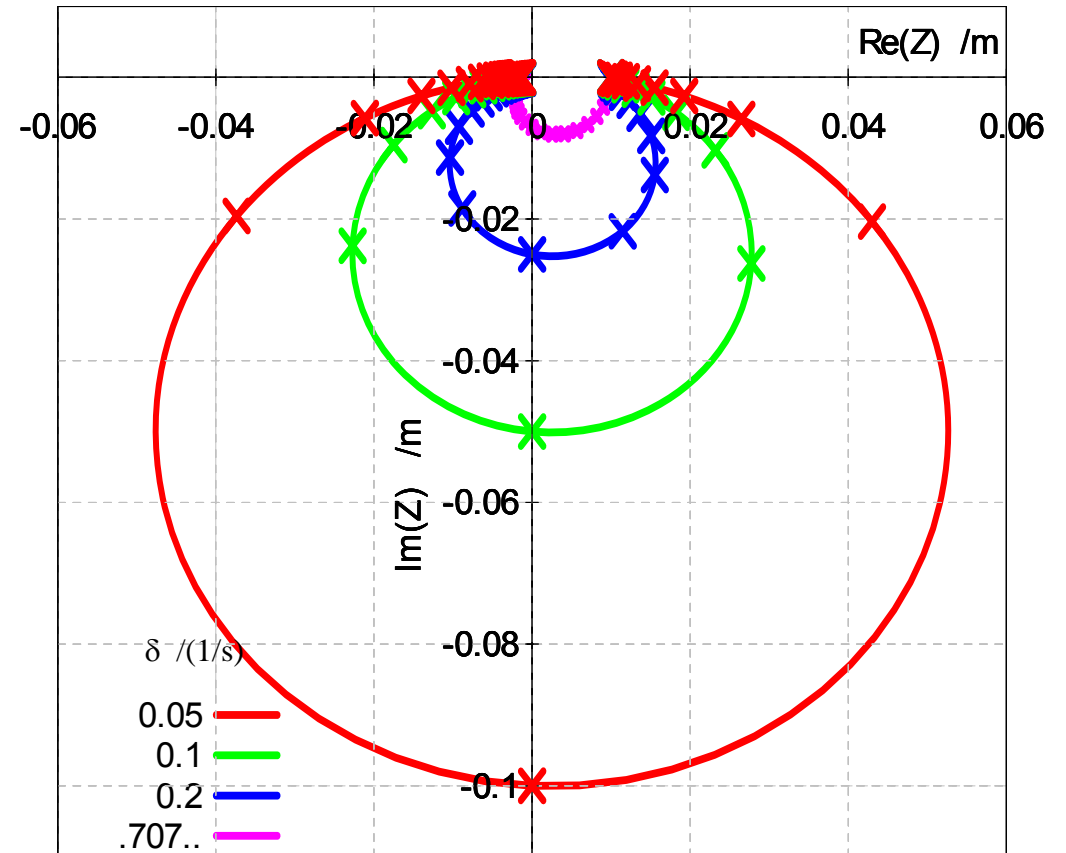
Für die Beispiel-Diagramme wurde $\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$ u. $\hat{Z}(0) = 1 \text{ cm}$ verwendet.

Dargestellter Frequenzbereich: $0 \leq \omega_E \leq 3 \cdot \omega_0$,

Markierungen (x) auf den Ortskurven bei $\omega_E = 0, 0,1 \cdot \omega_0, 0,2 \cdot \omega_0, 0,3 \cdot \omega_0, \dots$

(siehe auch Gnuplot-Datei „erzwungene_schwingungen_komplex.plt“ !).

Erzwungene Schwingungen, Resonanz: Ortskurve in komplexer Ebene

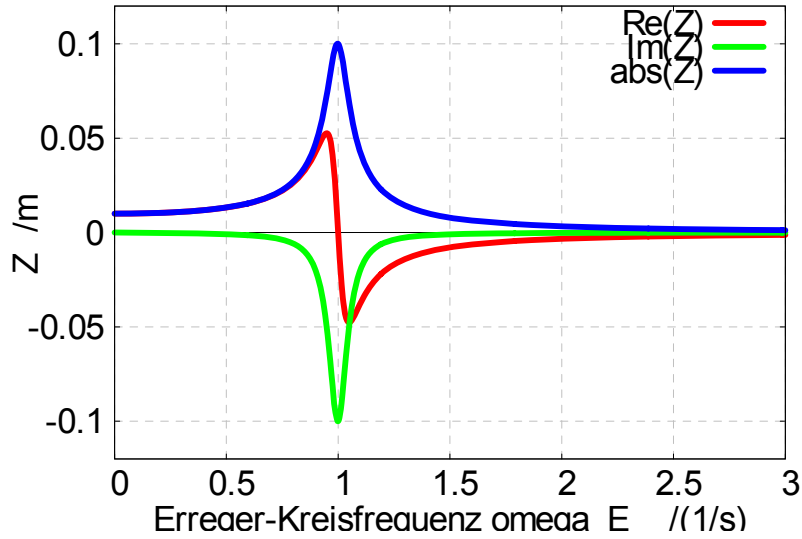


Erzwungene Schwingungen, Resonanz ; $D = 0.05$

$$\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$$

$$\delta = 0,05 \frac{1}{s}$$

←

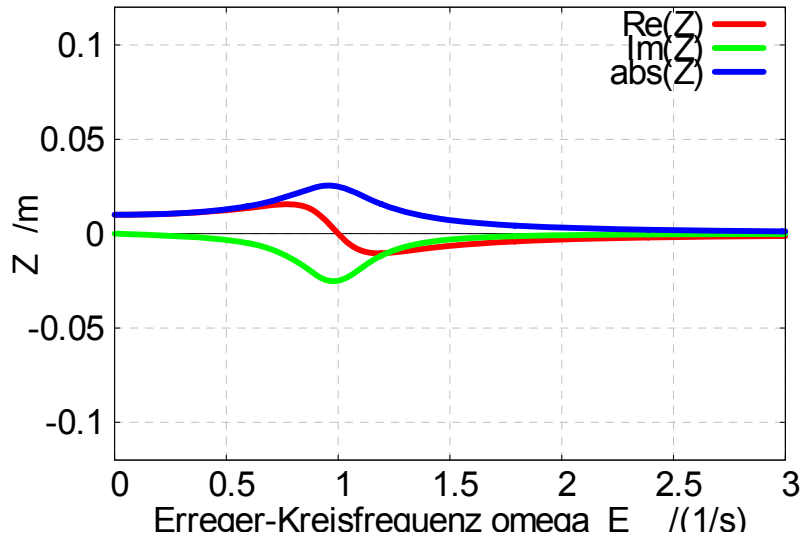


Erzwungene Schwingungen, Resonanz ; $D = 0.2$

$$\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$$

$$\delta = 0,2 \frac{1}{s}$$

←

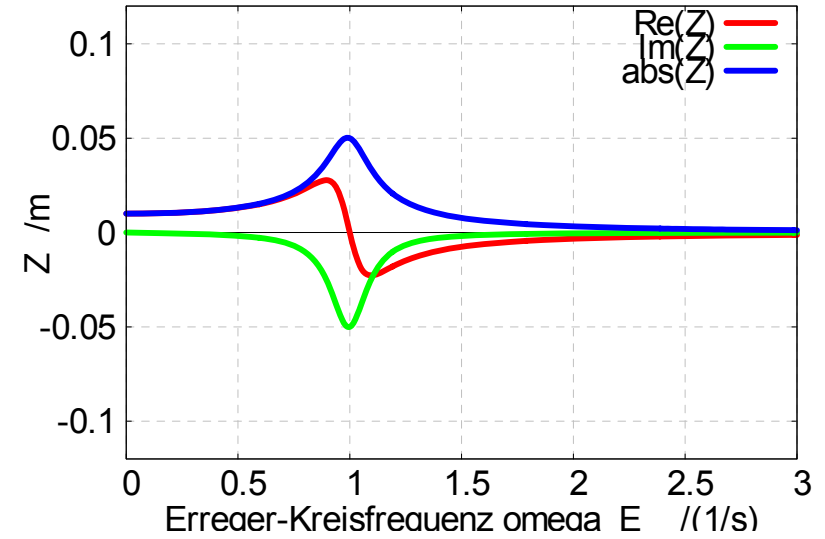


Erzwungene Schwingungen, Resonanz ; $D = 0.1$

$$\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$$

$$\delta = 0,1 \frac{1}{s}$$

→

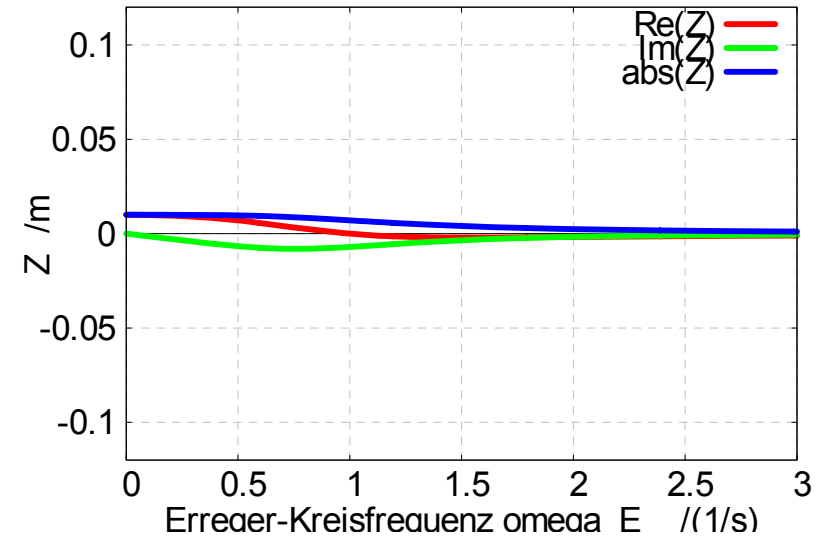


Erzwungene Schwingungen, Resonanz ; $D = 0.707$

$$\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{s}$$

→



Zum besseren Verständnis der Folgerungen aus den obigen Diagrammen schreiben wir den physikalisch relevanten Realteil unseres Ansatzes $x(t) = \hat{Z} \cdot e^{j\omega_E t}$ (Gl.4.1.63.) explizit auf. Mit der Euler-Formel (Gl.4.1.22.) erhält man :

$$x(t) = \{ \operatorname{Re}(\hat{Z}) + j \operatorname{Im}(\hat{Z}) \} \cdot \{ \cos(\omega_E \cdot t) + j \sin(\omega_E \cdot t) \}$$

$$x(t) = \{ \operatorname{Re}(\hat{Z}) \cdot \cos(\omega_E \cdot t) - \operatorname{Im}(\hat{Z}) \cdot \sin(\omega_E \cdot t) \} + j \{ \operatorname{Im}(\hat{Z}) \cdot \cos(\omega_E \cdot t) + \operatorname{Re}(\hat{Z}) \cdot \sin(\omega_E \cdot t) \}$$

Somit ergibt sich der „physikalisch interessante“ Realteil, der die Bewegung des Systems beschreibt, zu

$$\operatorname{Re}(x(t)) = \left(\boxed{\operatorname{Re}(\hat{Z}) \cdot \cos(\omega_E \cdot t)} - \boxed{\operatorname{Im}(\hat{Z}) \cdot \sin(\omega_E \cdot t)} \right) \quad [\text{Gl.4.1.68.}]$$

Wir sehen daran:

- Der **Realteil** von \hat{Z} ergibt eine Kosinus-Schwingung (in Phase mit der **Kraft**)
Damit ist die **Geschwindigkeit** aber gegenüber der Kraft um 90° in der Phase verschoben.
Mit dieser Komponente der Bewegung erzeugt die Kraft nur **Blindleistung**“
- der **Imaginärteil** von \hat{Z} ergibt dagegen eine Sinus-Schwingung
(90° Phasenunterschied zur Kraft)
Damit sind die **Geschwindigkeit** und **Kraft in Phase**.
Bei dieser Komponente der Bewegung erzeugt die Kraft **Wirkleistung!**

Anschaulicher und leichter zu beobachten als Imaginär- und Realteil einer komplexen Funktion sind Amplitude und Phasenverschiebung der Schwingung. Wir diskutieren deshalb noch ausführlich die Amplitude („Amplitudenresonanzfunktion“) und die Phase („Phasenresonanzfunktion“) der erzwungenen Schwingung (stationäre Schwingung, eingeschwungener Zustand).

Amplitudenresonanzfunktion

Aus Gl. Gl.4.1.66. bzw. Gl.4.1.67. erhält man die Amplitude als Betrag von \hat{Z} zu

$$A(\omega_E) = |\hat{Z}(\omega_E)|$$

Amplitudenresonanzfunktion

$$A(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \quad [\text{Gl.4.1.69.}]$$

Die Amplitudenresonanzfunktion lässt sich noch in vielen anderen Versionen darstellen. Z.B. kann man die statische bzw. quasistatischen Amplitude $\hat{Z}(0)$ wieder durch Kraftamplitude und Masse ausdrücken (vergl. Gl. Gl.4.1.64.):

$$A(\omega_E) = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \quad .$$

(Dadurch wird die Formel allerdings weniger allgemein anwendbar als vorher.)

Die Amplitudenresonanzfunktion Gl.4.1.69. kann so dargestellt werden, dass nur noch das Verhältnis (ω_E/ω_0) auftritt:

$$A(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_E^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

$$A(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\delta}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)\right]^2}}$$

Mit der Güte $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ ergibt sich schließlich


$$A(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}} \quad [\text{Gl.4.1.70.}]$$

Arbeitet man lieber mit der Frequenz f anstatt mit der Kreisfrequenz ω , so erhält man wegen

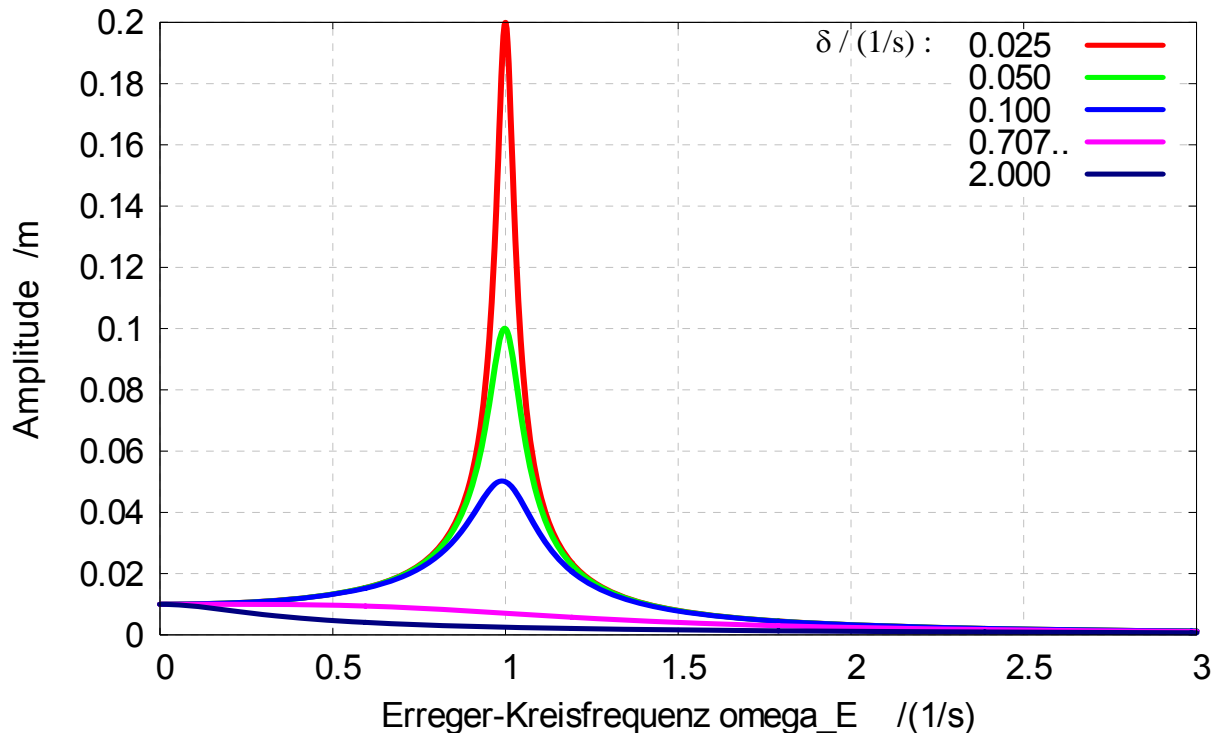
$$\frac{\omega_E}{\omega_0} = \frac{2\pi f_E}{2\pi f_0} = \frac{f_E}{f_0} :$$

$$A(f_E) = \frac{\hat{Z}(0)}{\sqrt{\left[1 - (f_E/f_0)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \cdot (f_E/f_0)^2}} \quad [\text{Gl.4.1.71.}]$$

Die Form der Amplitudenresonanzfunktion hängt also nur vom Verhältnis Erregerfrequenz/Eigenfrequenz, f_E/f_0 bzw. ω_E/ω_0 , und der Güte Q ab.

 **Übung:** Schreiben Sie die Formel so um, dass statt der Güte Q der Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ in der Amplitudenresonanzfunktion auftritt!

Erzwungene Schwingungen, Resonanz

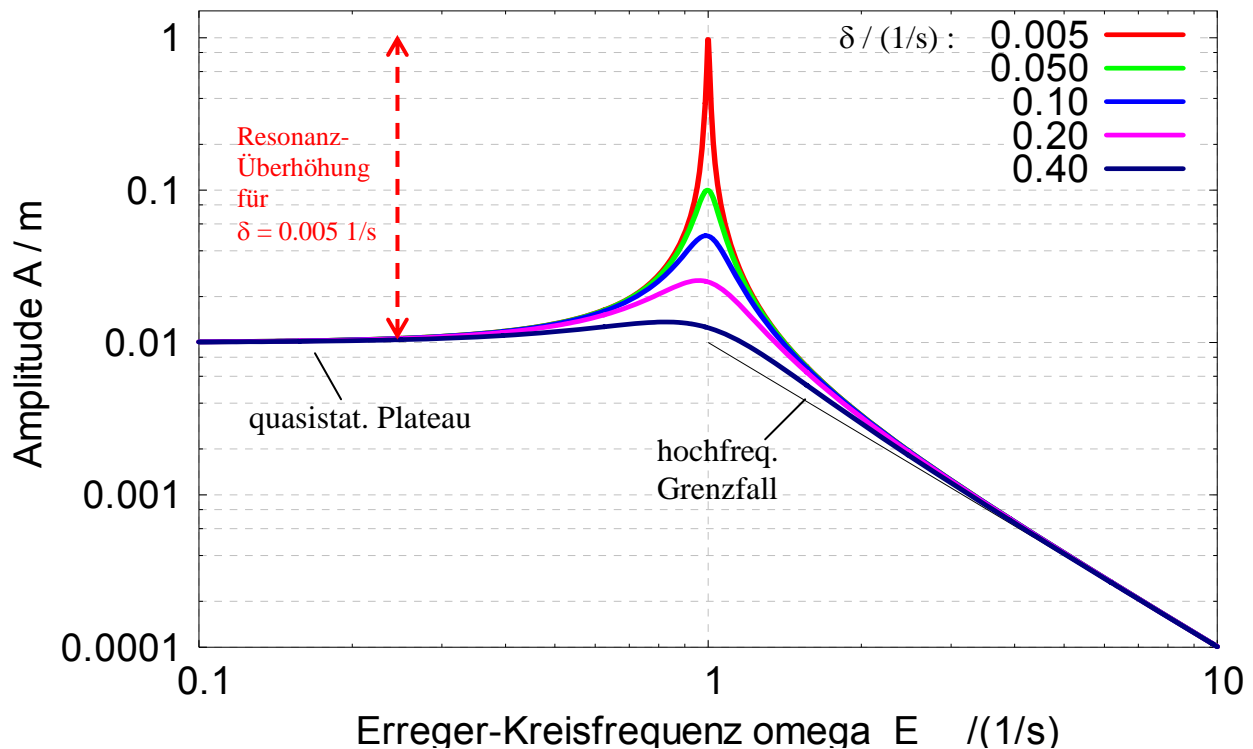


Beispiele für Amplitudenresonanzkurven mit verschiedenen Dämpfungen. ($\omega_0 = 1 \frac{1}{s}$, $\hat{Z}(0) = 1 \text{ cm}$)
(Gnuplot-Datei „erzwungene_schwingungen_komplex.plt“).

Einige Details der Resonanzkurven (z.B. das quasistationäre Plateau, das Zusammenlaufen der Kurven bei der hochfrequenten Anregung und die Größe der Resonanzüberhöhung) sind deutlicher zu erkennen, wenn diese doppeltlogarithmisch dargestellt werden (Frequenz- und Amplitudenachse logarithmisch geteilt) ¹³.

¹³ Frequenzgangskurven von Lautsprechern, Verstärkern etc. haben i.Allg. eine logarithmische Frequenzachse, die „y-Achse“ wird dort meist in „dB“ angegeben. „dB“ (Dezibel) ist ein logarithmisches Pegelmaß. Diese Darstellungsweise entspricht also genau der doppeltlogarithmischen Darstellung oben!

Resonanzkurve, doppeltlogarithmisch



Eigenschaften der **Amplitudenresonanzfunktion** $A(\omega_E)$

Aus Gl.4.1.69. bzw. den Beispiel-Diagrammen ergibt sich ...

➤ **„Quasistationäres Plateau“**

Setzt man die Erregerfrequenz zu Null, so erhält man für die statische Auslenkung („Amplitude bei 0 Hertz“) $A(0) = \hat{Z}(0)$. Bei niederfrequenter Anregung ($\omega_E \ll \omega_0$) erhält man (unabhängig von der Dämpfung) das so genannte **„quasistationäre Plateau“**. Bei Frequenzen, die klein gegen die Resonanzfrequenz sind, ist die Amplitude (näherungsweise) unabhängig von ω_E und so groß wie die statische Auslenkung durch die Kraft \hat{F} :

$$A(\omega_E) = |\hat{Z}(\omega_E)| \approx |\hat{Z}(0)| = \frac{\hat{F}}{m\omega_0^2} \quad \text{für } \omega_E \ll \omega_0.$$

(Für den Masse-Feder-Schwinger ist $\omega_0^2 = c/m$, also $A \approx \hat{F}/c$).

Wegen der Spreizung des niederfrequenten Bereichs wird dies in der logarithmischen Darstellung besonders deutlich.

➤ **„Hochfrequente Anregung“**

Ist die Erregerfrequenz groß gegen die Eigenfrequenz des Systems, $\omega_E \gg \omega_0$, so nimmt die Amplitude schnell ab. Im hochfrequenten Grenzfall, $\omega_E \gg \omega_0$, ist in Gl.4.1.69. ω_0^2 gegen ω_E^2 und dann ebenso $(2\delta\omega_E)^2$ gegen ω_E^4 vernachlässigbar. Es ergibt sich dann:

$$A(\omega_E) = \hat{Z}(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$$

$$A(\omega_E) \approx \hat{Z}(0) \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_E}\right)^2 \quad (\text{für } \omega_E \gg \omega_0) \quad [\text{Gl.4.1.72.}]$$

Bei hochfrequenter Anregung, $\omega_E \gg \omega_0$, nimmt die Amplitude also wie $A(\omega_E) \sim \frac{1}{\omega_E^2}$ ab

Bei Verdopplung der Frequenz sinkt dann die Amplitude auf ein Viertel. In der doppeltlogarithmischen Darstellung (vergl. Diagramm!) nähern sich die Resonanzkurven mit verschiedener Dämpfung asymptotisch einer universellen Geraden mit der Steigung -2 (\Rightarrow eine Dekade mehr auf der Frequenzachse entspricht zwei Dekaden weniger auf der Amplitudenachse, vergl. Diagramm!).

Dieses Verhalten kann zur Schwingungsdämpfung (z.B. bei der Aufstellung von Maschinen) verwendet werden, indem man die Resonanzfrequenz so tief wählt, dass alle zu erwartenden Störfrequenzen (welche die Maschine zu Schwingungen anregen könnten) viel höher als die Resonanzfrequenz sind.

➤ Resonanzfrequenz

Zwischen „quastationärer“ und „hochfrequenter“ Anregung liegt der Resonanzbereich. Hier, in der Nähe der Eigenfrequenz des Systems, wird die Schwingungsamplitude merklich größer. Die Erregerkraft wirkt jetzt in einem Takt, der zur Frequenz der (freien) Eigenschwingung passt. Es kommt dadurch zu einem Mitschwingen oder einer „Schwingungsanfachung“. Dieses Phänomen wird **Resonanz** genannt. Dem System wird dabei durch die periodische äußere Kraft Energie zugeführt und die Amplitude steigt so lange an, bis die Reibungsverluste die Energiezufuhr ausgleichen.

- $A(\omega_E)$ hat ein Maximum bei $\omega_E \approx \omega_0$

Für $\delta \neq 0$ sind jedoch die beiden (Kreis-) Frequenzen nicht exakt gleich.

Die genaue Lage des Maximums der Resonanzkurve erhalten wir aus Gl.4.1.69.

$A(\omega_E) = |\hat{Z}(\omega_E)|$ wird maximal, wenn der Nenner minimal wird; also für

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left((\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2\right)}{d\omega_E} = 0$$

→ Minimum!

$$\Leftrightarrow 2(\omega_0^2 - \omega_E^2) \cdot (-2\omega_E) + 4\delta^2 2\omega_E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_E^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

- Wir nennen die (Kreis-) Frequenz, bei der die maximale Amplitude auftritt, Resonanzfrequenz oder (genauer) Amplitudenresonanzfrequenz.

Amplitudenresonanzfrequenz

$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

[Gl.4.1.73.]

Natürlich kann auch - wie immer - von Kreisfrequenz auf Frequenz umgerechnet werden:

$$f_{\text{Res}} = \frac{\omega_{\text{Res}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{2\pi}, \quad f_{\text{Res}} = \sqrt{f_0^2 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}}$$

Die Amplitudenresonanzfrequenz ist also (abhängig von der Dämpfung) immer etwas kleiner als die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0 .

(ω_{Res} ist sogar noch etwas kleiner als die Schwingungsfrequenz des gedämpften HO im „Schwingfall“, diese war $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$)

Bei schwacher Dämpfung, also wenn das Resonanzmaximum hoch ist, ist der Unterschied zwischen ω_0 und ω_{Res} allerdings häufig vernachlässigbar.

➤ **Resonanzmaximum und Resonanzüberhöhung**

Bei geringer Dämpfung erhält man ein **Resonanzmaximum**, das um so schmaler und höher ist, je geringer die Dämpfung bzw. je größer die **Güte** des Oszillators ist.

Die maximale Amplitude erhält man, wenn man in Gl.4.1.69. für ω_E die Resonanzfrequenz

$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ einsetzt:

$$A(\omega_{\text{Res}}) = A(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2))^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = A(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}}$$

$$A(\omega_{\text{Res}}) = A(0) \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} = A(0) \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Da die Resonanzamplitude proportional zur statischen Auslenkung $A(0)$ ist, ist es vorteilhaft, das Verhältnis der beiden Größen zu betrachten. Dieses Verhältnis wird **Resonanzüber-**

höhung genannt. Mit der Güte $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ ergibt sich diese zu


Resonanzüberhöhung:
$$v_{\text{Res}} = \frac{A(\omega_{\text{Res}})}{A(0)} = Q \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} \quad [\text{Gl.4.1.74.}]$$

Die Resonanzüberhöhung ist der Faktor, um die die Wirkung einer Kraft durch den Resonanzeffekt verstärkt wird (und wird deshalb auch „Kraftverstärkungsfaktor“ genannt).

Bei schwacher Dämpfung ist $\delta \ll \omega_0$ (und damit auch $Q \gg 1$!). Dann gilt näherungsweise:

$$v_{\text{Res}} = \frac{A(\omega_{\text{Res}})}{A(0)} \approx Q \quad \text{für } \delta \ll \omega_0 \quad [\text{Gl.4.1.75.}]$$

Bei schwacher Dämpfung ist die **Resonanzüberhöhung** (näherungsweise) gleich der **Güte** !

 **Übung:** Berechnen Sie für die in der doppeltlog. Darstellung (weiter oben) dargestellten Beispielkurven jeweils die Resonanzüberhöhung (mit der exakten Formel und zum Vergleich mit der Näherung für schwache Dämpfung) und zeichnen Sie diese als senkrechte Linie in das Diagramm ein (wie im Beispiel für $\delta = 0,005$ 1/s!

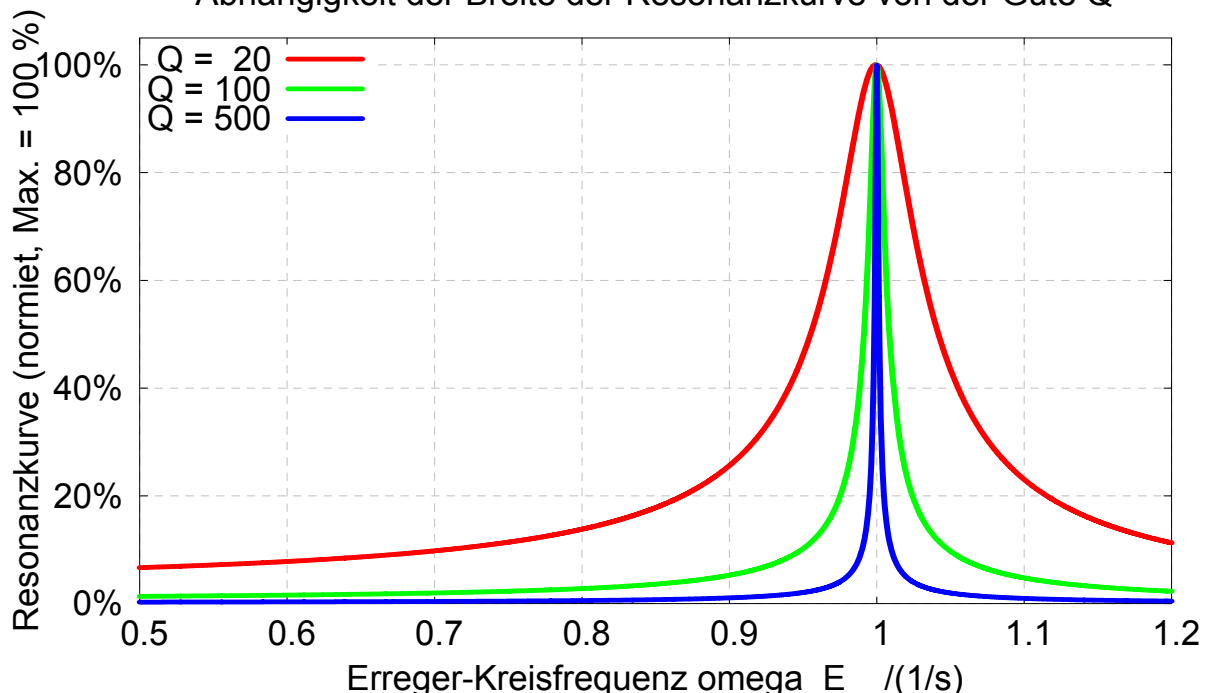
➤ Breite der Resonanzkurve

In vielen Anwendungen wird ausgenutzt, dass Resonanz nur in einem engen Frequenzbereich $\Delta\omega$ um das Resonanzmaximum herum auftritt. Man definiert diesen Frequenzbereich i.Allg. so, dass die Amplitude gegenüber dem Maximum um einen gewissen Faktor (üblich sind z.B. 2 oder $\sqrt{2}$) abnimmt. Für schwache Dämpfung, $Q \gg 1$, gilt näherungsweise¹⁴:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \frac{1}{Q} \quad \text{[Gl.4.1.76.]}$$

Je größer die Güte, desto schmalbandiger („schärfer“) wird die Resonanzkurve! Da die Resonanzüberhöhung mit wachsender Güte aber auch steigt, sieht man diesen Effekt besser, wenn die Resonanzkurve so normiert wird, dass das Maximum immer bei 100 % liegt.

Abhängigkeit der Breite der Resonanzkurve von der Güte Q



¹⁴ Berechnung der Breite der Resonanzkurve $\Delta\omega$: Für schwache Dämpfung ist die Res.-Überh. $\approx Q$. Wir suchen die zwei (näherungsweise zu ω_0 symmetrischen) Frequenzen $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega$, bei denen die Amplitude um den Faktor „k“ (auf $\hat{Z}(0) \cdot Q/k$) abgefallen ist. Mit der Abkürzung $x = (\omega_E/\omega_0)^2$ erhält man dafür aus Gl.4.1.70. $\frac{Q}{k} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + x/Q^2}}$. Daraus ergibt sich die quadr. Gleichung $x^2 - x\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + \left(1 - \frac{k^2}{Q^2}\right) = 0$ mit den zwei Lösungen

$$x_{1,2} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{k^2}{Q^2} - 1} \quad \text{bzw.} \quad x_{1,2} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \pm \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + (k^2 - 1)}$$

Für $Q \gg 1$ ist $\frac{1}{2Q^2} \ll 1$ und $\frac{1}{4Q^2} \ll (k^2 - 1)$. Man erhält somit: $x_{1,2} \approx 1 \pm \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{Q}$. Andererseits ist $x_{1,2} = \left(\frac{\omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 \pm \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2 \approx 1 \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$

(die quadratischen Terme wurden wieder vernachlässigt). Durch Vergleich erhält man schließlich $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{Q}$.

Für den Fall $k = \sqrt{2}$ ergibt sich daraus $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{Q}$; für die „Halbwertsbreite“ (HWB, $k = 2$) folgt $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\sqrt{3}}{Q}$.

Im Beispieldiagramm wurde die Güte jeweils um einen Faktor 5 vergrößert, die Breite der Resonanzkurve wird dann um den gleichen Faktor kleiner!

➤ Resonanzkatastrophe

Für kleine Dämpfung, $\delta \rightarrow 0$, wird die Resonanzüberhöhung bzw. die Amplitude immer größer. Formell ergibt sich für $\delta = 0$ bei $\omega_E = \omega_0$ eine **unendlich große Amplitude**. Praktisch wird es natürlich schon vorher zum Versagen des Bauteils bzw. zur Zerstörung des Geräts kommen. Bekannt ist das Beispiel der Tacoma Narrows Bridge, die 1940 einstürzte.

➤ Kritische Dämpfung

Wird die Dämpfung dagegen immer größer, so wird die Resonanzkurve immer flacher und das Maximum verschiebt sich zu kleineren Frequenzen (Gl.4.1.73.). Bei der so genannten „kritische Dämpfung“ hat sich das „Resonanzmaximum“ schließlich bis zu $\omega_{\text{Res}} = 0$ verschoben; die Schwingungsamplitude nimmt dann mit wachsender Erregerfrequenz monoton ab. Die für die kritische Dämpfung erforderliche Abklingkonstante erhalten wir leicht, wenn wir die Resonanzfrequenz (Gl.4.1.73.) $\omega_{\text{Res}} = 0$ setzen:

$$\omega_{\text{Res}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta_{\text{krit.}}^2 = 0$$

$$\delta_{\text{krit.}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = 0,707... \cdot \omega_0 \quad [\text{Gl.4.1.77.}]$$

$$Q_{\text{krit.}} = \frac{\omega_0}{2\delta_{\text{krit.}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707...$$

Ist die Güte eines Oszillators $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, so gibt es kein Resonanzmaximum mehr!

Phasenresonanzfunktion

Die **Phasenlage der erzwungenen Schwingung** wurde bereits bei der Diskussion der komplexen Funktion $\hat{Z}(\omega_E)$ besprochen (vergl. Seite 47).

Zur Erinnerung:

Wir hatten die **Erregerkraft** als cos-Schwingung ohne Nullphasenwinkel angenommen:

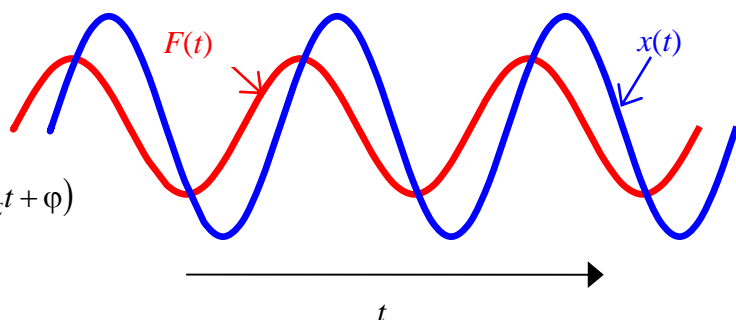
- $F(t) = \text{Re}(\hat{F} \cdot e^{j\omega_E t}) = \hat{F} \cdot \cos(\omega_E t)$

Die **Bewegung** $x(t)$ des Systems (im eingeschwungenen Zustand) ergibt sich aus dem Realteil der komplexen Lösung unserer DGL.:

- $x(t) = \text{Re}(\hat{Z} \cdot e^{j\omega_E t})$

Mit $\hat{Z} = A \cdot e^{j\varphi}$ wird daraus

- $x(t) = A \cdot \text{Re}(e^{j(\omega_E t + \varphi)}) = A \cdot \cos(\omega_E t + \varphi)$



Die **Kraft** („Ursache“) kommt zuerst, die **Auslenkung** („Wirkung“) folgt der Kraft **zeitlich verzögert**.

Daraus ergibt sich, dass die Phasenverschiebung von $x(t)$ immer **negativ** sein muss: $\varphi < 0$!

Wir betrachten beispielsweise den Zeitpunkt, zu dem die **Kraft** bzw. die **Auslenkung** jeweils ihr Maximum erreichen:

- Das (erste) **Maximum der Kraft** ist wegen $F(t) = \hat{F} \cdot \cos(\omega_E t)$ einfach bei $t = 0$.
- Das **Maximum der Auslenkung** muss dann bei $t > 0$ sein.
Wegen $x(t) = A \cdot \cos(\omega_E t + \varphi)$ muss für das erste Maximum gelten: $\omega_E \cdot t + \varphi = 0$.
Für $t > 0$ bedeutet das, dass die Phasenverschiebung **negativ** ist: $\varphi < 0$

Die Phasenresonanzfunktion, d.h. die Funktion, die die Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung gegenüber der Erregerkraft beschreibt, ergibt sich aus dem komplexen $\hat{Z}(\omega_E)$ über die Beziehung

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(\hat{Z})}{\text{Re}(\hat{Z})} \quad [\text{Gl.4.1.78.}]$$

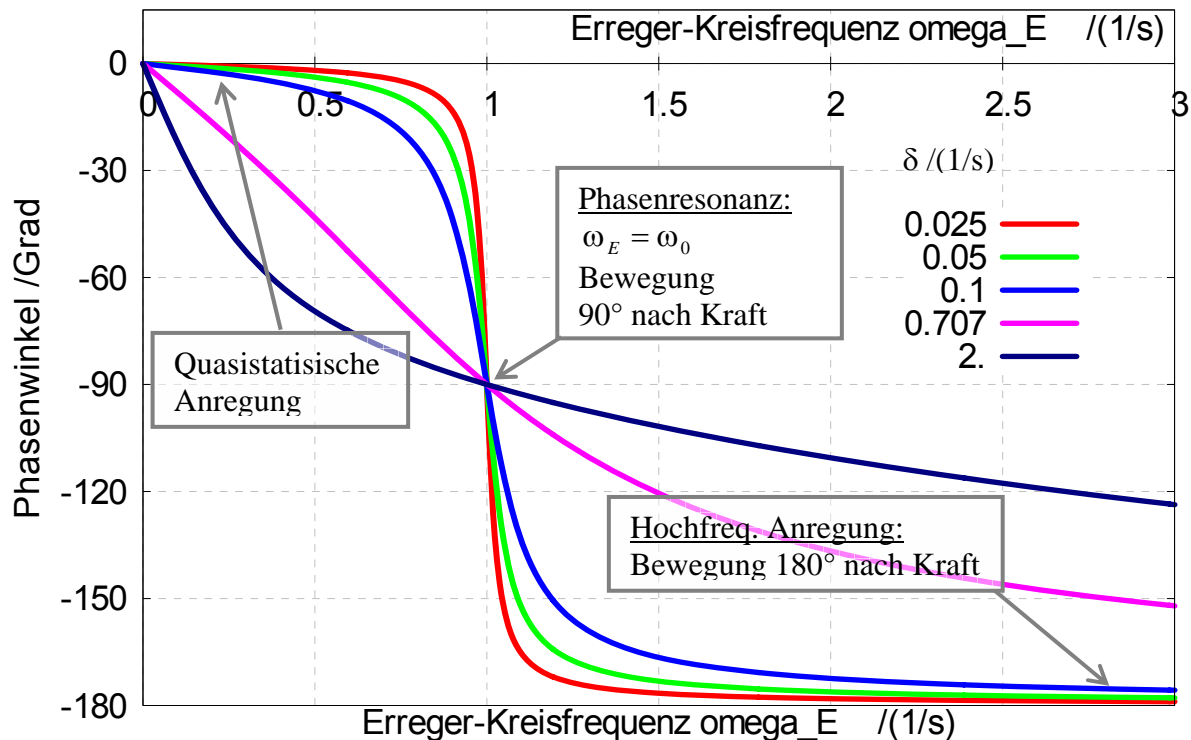
Mit Gl.4.1.67. ergibt sich

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{\hat{Z}(0) \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \cdot (-2\delta\omega_E)}{\frac{\hat{Z}(0) \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega_E^2)}, \quad \tan(\varphi) = \frac{-2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

$$\varphi(\omega_E) = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right) \quad \text{„Phasenresonanzfunktion“} \quad [\text{Gl.4.1.79.}]$$

Zu beachten ist, dass der Imaginärteil (Zähler) immer negativ ist (mit unserer Vorzeichendefinition!), der Realteil (Nenner) ist positiv für $\omega_E < \omega_0$ und negativ für $\omega_E > \omega_0$. Insbesondere im letzten Fall muss man Acht geben: Übliche arctan-Funktionen (z.B. Taschenrechner) geben dann wegen „-“/„-“ = „+“ einen Wert im ersten Quadranten ($0 \dots 90^\circ$) zurück, während der korrekte Phasenwinkel im **dritten Quadranten** ($-90^\circ \dots -180^\circ$) liegt.

Phasenresonanzfunktion



Bei niedriger Erregerfrequenz (quasistationäre Anregung) folgt die Bewegung der Kraft ohne Phasenverschiebung!	$\omega_E \rightarrow 0$	$\tan(\varphi) \rightarrow -0$	$(\varphi < 0)$
Bei Frequenzen unterhalb der Resonanz liegt die Phasenverschiebung zwischen 0 und -90°	$0 < \omega_E < \omega_0$	$\underbrace{\tan(\varphi) < 0}_{\text{endlich}}$	$(0^\circ > \varphi > -90^\circ)$
Bei der Eigenfrequenz ω_0 des Systems wird die Phasenverschiebung -90° . Dies gilt unabhängig von der Stärke der Dämpfung. \Leftrightarrow Phasenresonanz	$\omega_E \rightarrow \omega_0$	$\tan(\varphi) \rightarrow -\infty$	$\varphi \rightarrow -90^\circ$
Bei Frequenzen oberhalb der Resonanz liegt die Phasenverschiebung zwischen -90° und -180°	$\omega_E > \omega_0$	$\tan(\varphi) > 0$	$-90^\circ > \varphi > -180^\circ$
Bei sehr hoher Erregerfrequenz (hochfrequente Anregung) geht die Phasenverschiebung gegen -180°	$\omega_E \rightarrow \infty$	$\tan(\varphi) \rightarrow +0$	$\varphi \rightarrow -180^\circ$

Die **Phasenresonanz** (Kraft und Bewegung 90° phasenverschoben) tritt also (im Gegensatz zur Amplitudenresonanz) genau bei der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0 auf! Wie bereits bei der Diskussion der komplexen Resonanzfunktion besprochen bedeutet dies, dass dann Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind, auf das System in diesem Fall also maximale Wirkleistung übertragen wird!

Einschwingvorgänge

Wir erinnern uns an den Anfang des Kapitels „Erzwungene Schwingungen und Resonanz“:
Ein schwingungsfähiges System, auf das von außen eine „Erregerkraft“ einwirkt, wird durch eine inhomogene DGL beschrieben. Die allgemeine Lösung dieser DGL (für beliebige Anfangsbedingungen) erhält man durch Überlagerung einer „partikulären Lösung“ mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL (s. Seite 42). Für den Fall einer cos-förmigen Erregerkraft haben wir als „partikulären Lösung“ harmonische Schwingungen mit der Erregerfrequenz erhalten, deren Amplitude und Phasenlage berechnet und gesehen, dass die Amplitude sehr groß werden kann, wenn die Frequenz der Erregerkraft mit der Eigenfrequenz des Systems (näherungsweise) übereinstimmt („Resonanz“).

- Die bisher besprochene partikuläre Lösung der inhomogenen DGL beschreibt den eingeschwingenen Zustand, in dem der Oszillator mit fester Frequenz (der vorgegebenen Erregerfrequenz), Amplitude und Phase schwingt

$$x_{\text{part.}}(t) = A(\omega_E) \cdot e^{j(\omega_E \cdot t + \varphi(\omega_E))} \quad (\text{komplex}) \quad \text{bzw.} \quad x_{\text{part.}}(t) = A(\omega_E) \cdot \cos(\omega_E \cdot t + \varphi(\omega_E)) \quad (\text{reell})$$

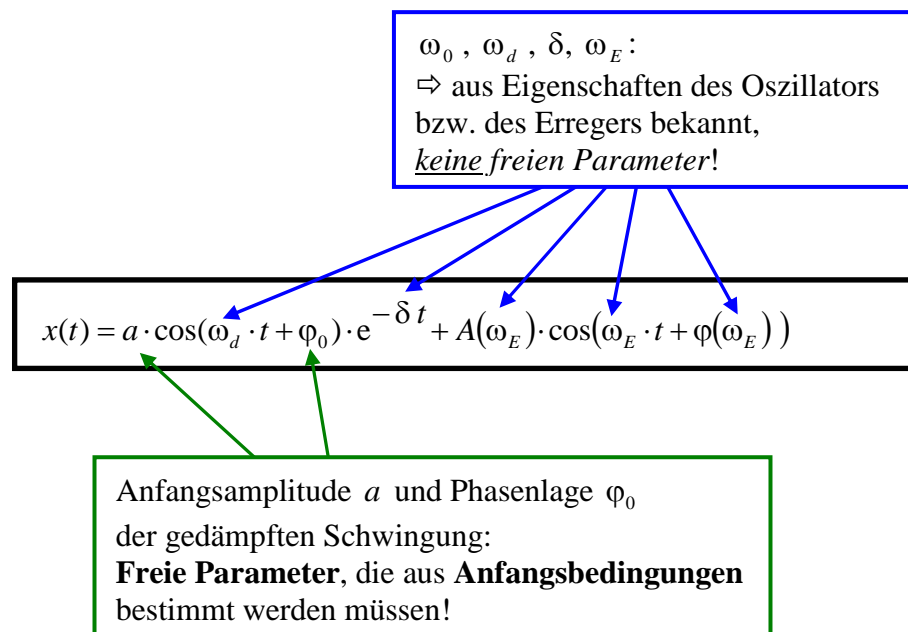
mit: $A(\omega_E) = \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}}$ (Gl.4.1.69.) und $\varphi(\omega_E) = \arctan\left(\frac{\dots}{\dots}\right)$ (Gl.4.1.79.)

- Diese Funktion hat keinerlei freien Parameter und kann deshalb höchstens zufällig irgendwelche Anfangsbedingungen erfüllen.

- Die allgemeine Lösung und damit die Beschreibung des **Einschwingvorgangs** erhalten wir, wenn wir noch die allgemeine Lösung der homogenen DGL (Kap. 4.1.2) überlagern (s. Seite 42).

Dazu muss zunächst geprüft werden, ob der **Schwingfall**, der **aperiodische Grenzfall** oder der **Kriechfall** vorliegt. Im Schwingfall ergibt sich beispielsweise:

$$x_{\text{hom}}(t) = a \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi_0) \cdot e^{-\delta t}$$




- Achtung: Bei der Bestimmung der freien Parameter aus den Anfangsbedingungen muss die gesamte Funktion $x_{\text{hom}} + x_{\text{part.}}$ (bzw. deren Ableitung, wenn die Geschwindigkeit gegeben ist) verwendet werden!

- Dies führt (leider) in den meisten Fällen zu einer „etwas umständlichen“ Rechnung ... auf die hier verzichtet werden soll.

Die Lösung für $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$ finden Sie in der Gnuplot-Datei „einschwingvorgang.plt“.

In Spezialfällen vereinfacht sich die Rechnung aber möglicherweise drastisch. Falls die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Systems ist ($\omega_E = \omega_0$, Phasenresonanz!), so ist die Phasenverschiebung immer $-\frac{1}{2}\pi$, bei einer cos-förmigen Kraft erhält man für $x_{\text{part.}}(t)$ eine sin-Schwingung, die bei $t=0$ einen Nulldurchgang mit leicht zu bestimmender Geschwindigkeit hat. Wenn nun die Anfangsbedingung $x(0)=0$ vorliegt, dann muss auch für die Lsg. der homogenen DGL gelten: $x_{\text{hom}}(0)=0$. Damit ergibt sich die Phasenlage von $x_{\text{hom}}(t)$, ebenfalls eine sin-Schwingung (aber hier gedämpft!). Der letzte freie Parameter, die Anfangsamplitude der gedämpften Schwingung, wird schließlich so bestimmt, dass man zusammen mit der part. Lsg. die gewünschte Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ erhält.

 **Übung:** Bestimmen Sie für $\omega_E = \omega_0$ die Lsg. der inh. DGL. für die Anfangsbedingungen $x(0)=0$ und $v(0)=0$! Gegeben seien:
 ω_0 , $\omega_E (= \omega_0)$, δ ($\delta < \omega_0$!), $\hat{Z}(0)$ (quasistatische Amplitude)
Rechnen Sie zunächst allgemein, wählen Sie dann geeignete Zahlenwerte und stellen Sie die Lösung graphisch dar!

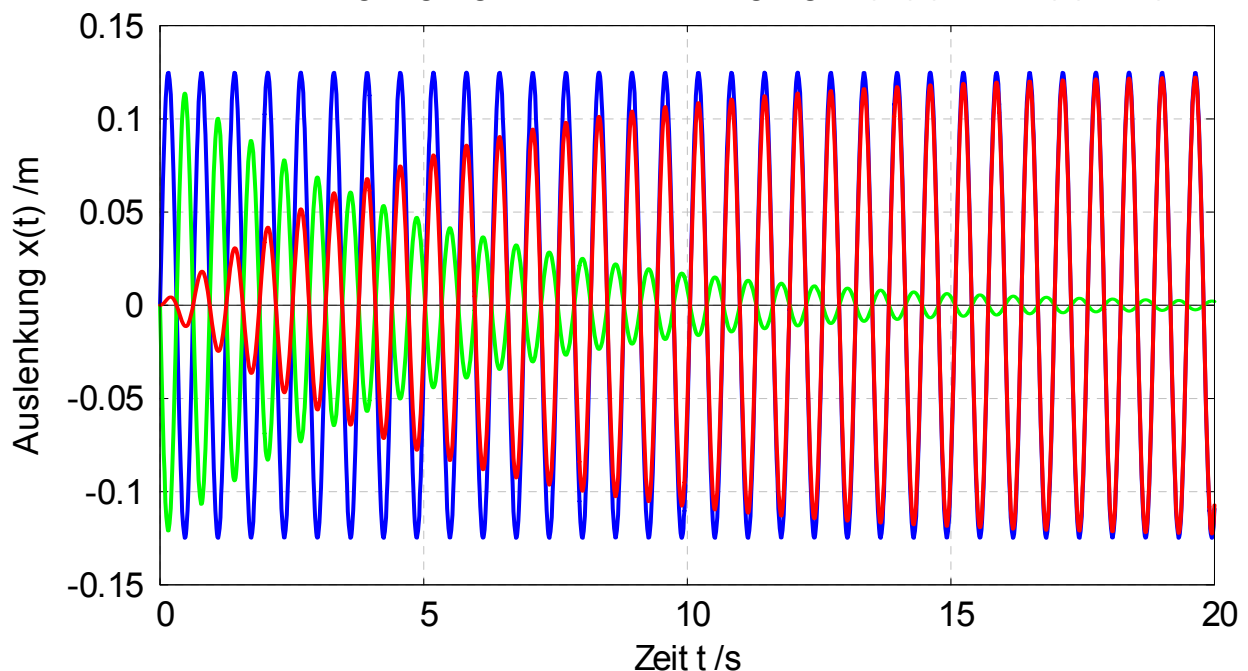
Die folgenden 6 Beispieldiagramme mit den Anfangsbedingungen $x(0)=0$, $v(0)=0$ wurden mit der Gnuplot-Datei „einschwingvorgang.plt“ erzeugt. Bei allen Beispielen ist $\omega_0=10$ 1/s und die statische Auslenkung (und damit die quasistatische Amplitude) beträgt 5 mm. Verändert wird lediglich die Erregerfrequenz und die Dämpfung.

rot — : $x(t)$, d.h. das ist die wirklich zu beobachtende Bewegung des Systems
blau — : $x_{\text{part.}}(t)$, stationäre Schwingung, eingeschwungener Zustand
grün — : $x_{\text{hom}}(t)$, überlagerte Lsg. der homogenen DGL. (ged. Schwingung)

Beispiel 1: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 10 \frac{1}{s}$, $\delta = 0,2 \frac{1}{s}$

Erregerfrequenz gleich Eigenfrequenz (Phasenresonanz), \Rightarrow gleichmäßiges Aufschaukeln der Schwingung (Reflexion des Abklingens der gedämpften Schwingung), Einschwingvorgang dauert so lange wie das Ausschwingen des gedämpften Oszillators, große Amplitude (große Resonanzüberhöhung!)

Einschwingvorgang bei erzw. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)

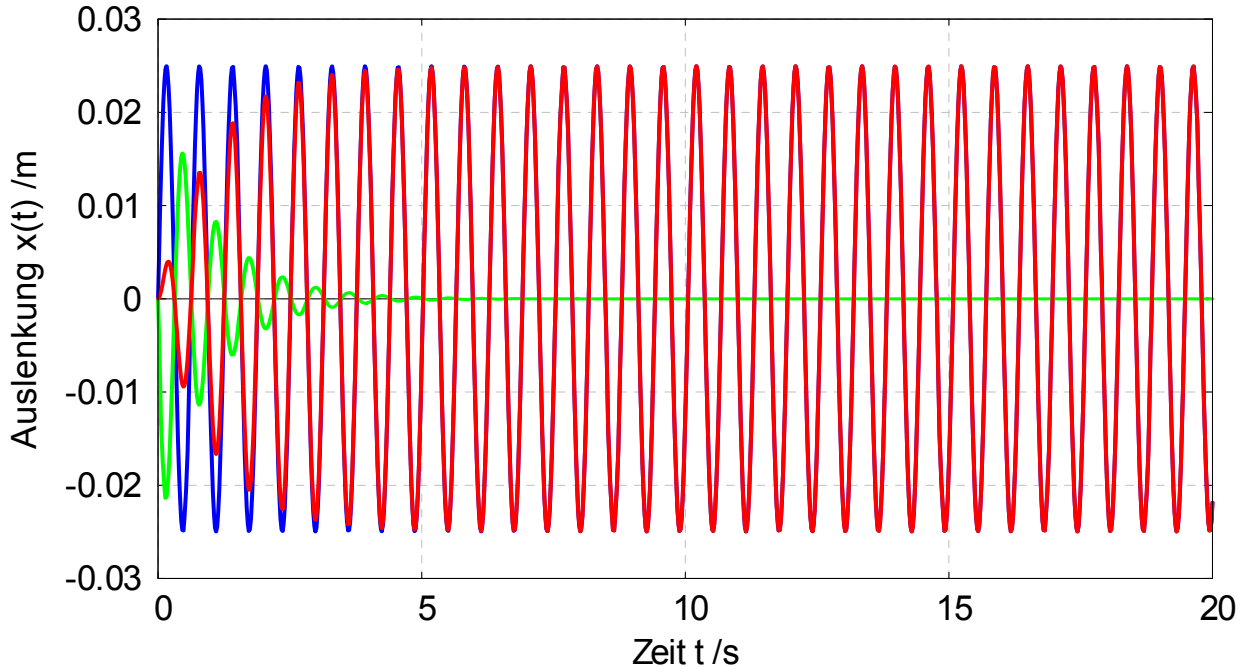


Beispiel 2: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 10 \frac{1}{s}$, $\delta = 1,0 \frac{1}{s}$

Wie Bsp. 1, aber stärkere Dämpfung;

⇒ kleinere Amplitude, schnelleres Einschwingen!

Einschwingvorgang bei erzw. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)

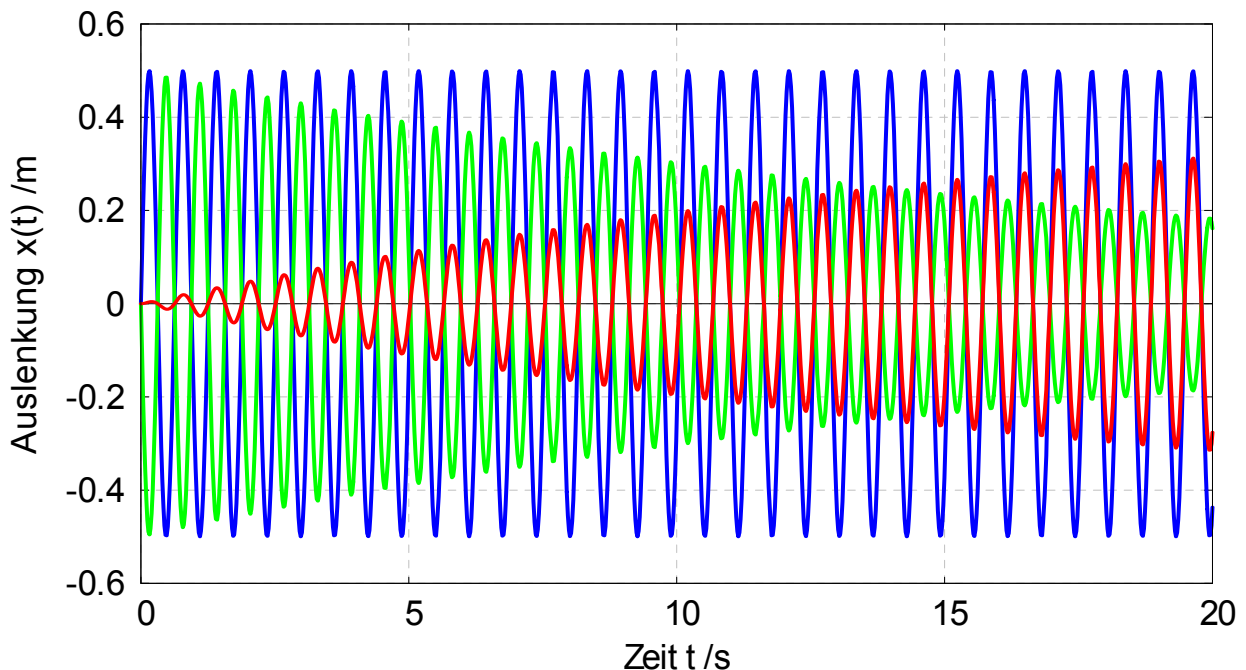


Beispiel 3: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 10 \frac{1}{s}$, $\delta = 0,05 \frac{1}{s}$

Wie Bsp. 1, aber sehr kleine Dämpfung;

⇒ sehr große Endamplitude ($Q = 100$!), langer Einschwingvorgang, anfänglich (näherungsweise) lineare Amplitudenzunahme!

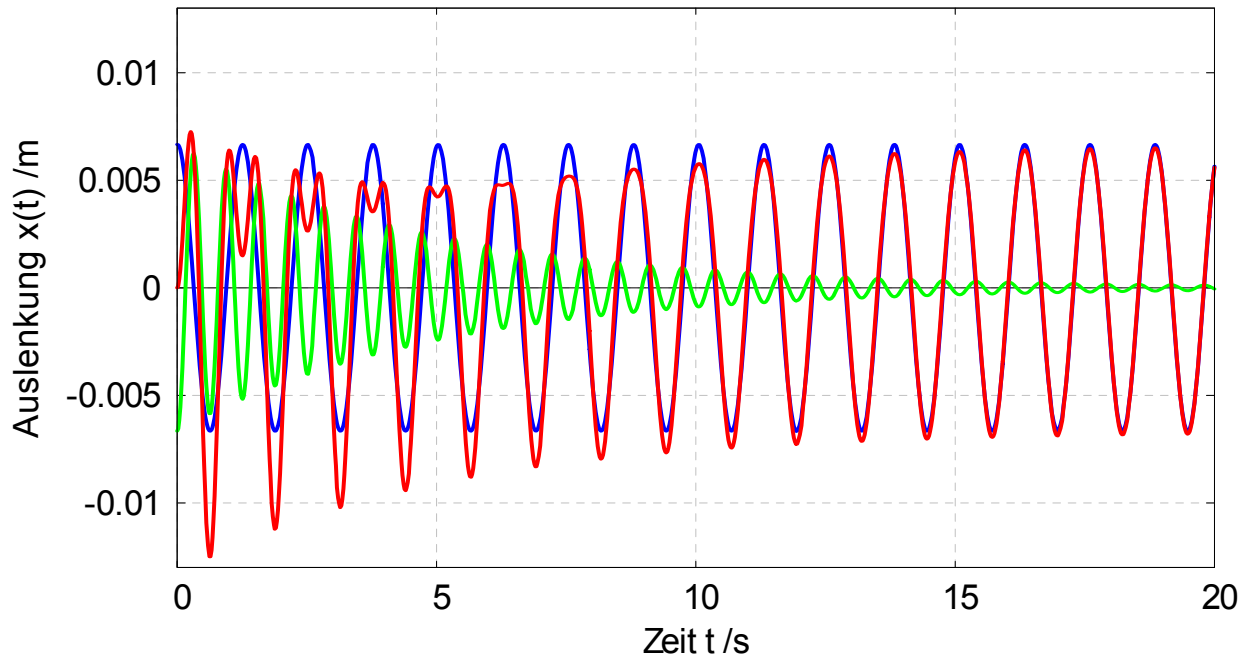
Einschwingvorgang bei erzw. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)



Beispiel 4: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 5 \frac{1}{s}$, $\delta = 0,2 \frac{1}{s}$

Erregerfrequenz gleich halber Eigenfrequenz, komplizierter Einschwingvorgang (Überlagerung der zwei Funktionen mit unterschiedlichen Frequenzen, Schwebung)!

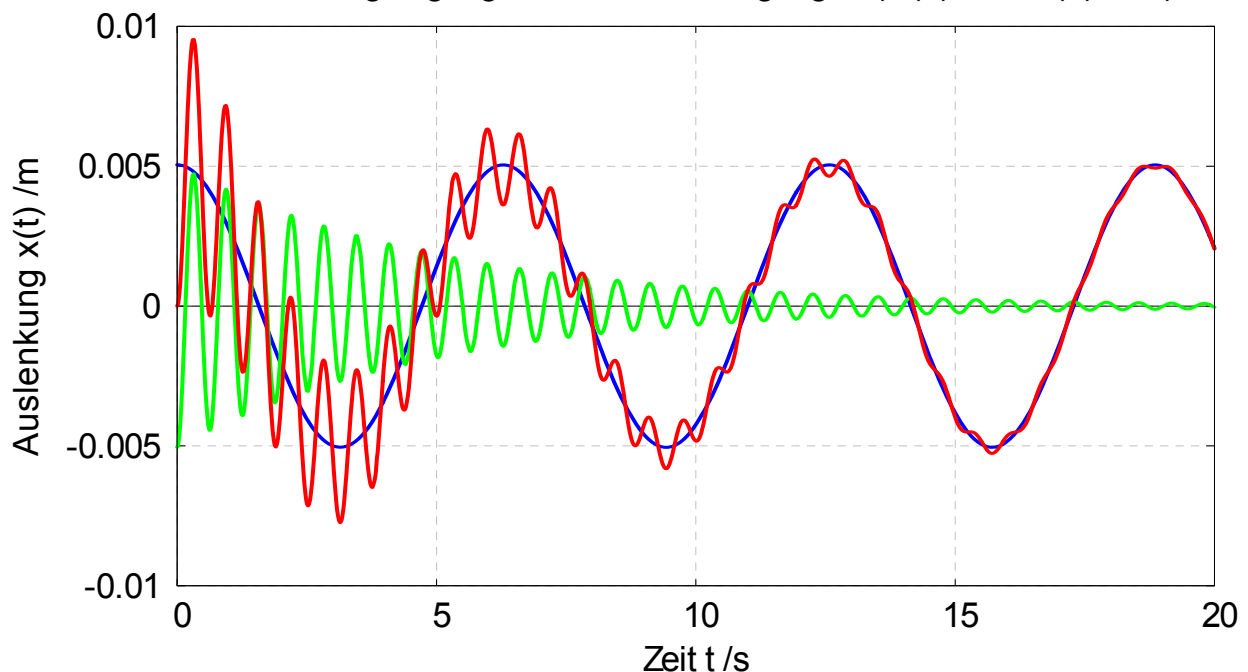
Einschwingvorgang bei erzv. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)



Beispiel 5: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 1 \frac{1}{s}$, $\delta = 0,2 \frac{1}{s}$

Erregerfrequenz sehr viel kleiner als Eigenfrequenz („quasistationäres Plateau“), Überlagerung der schnellen gedämpften Schwingung mit der langsamen Schwingung des Erregers, Ampl. \approx stat. Auslenkung

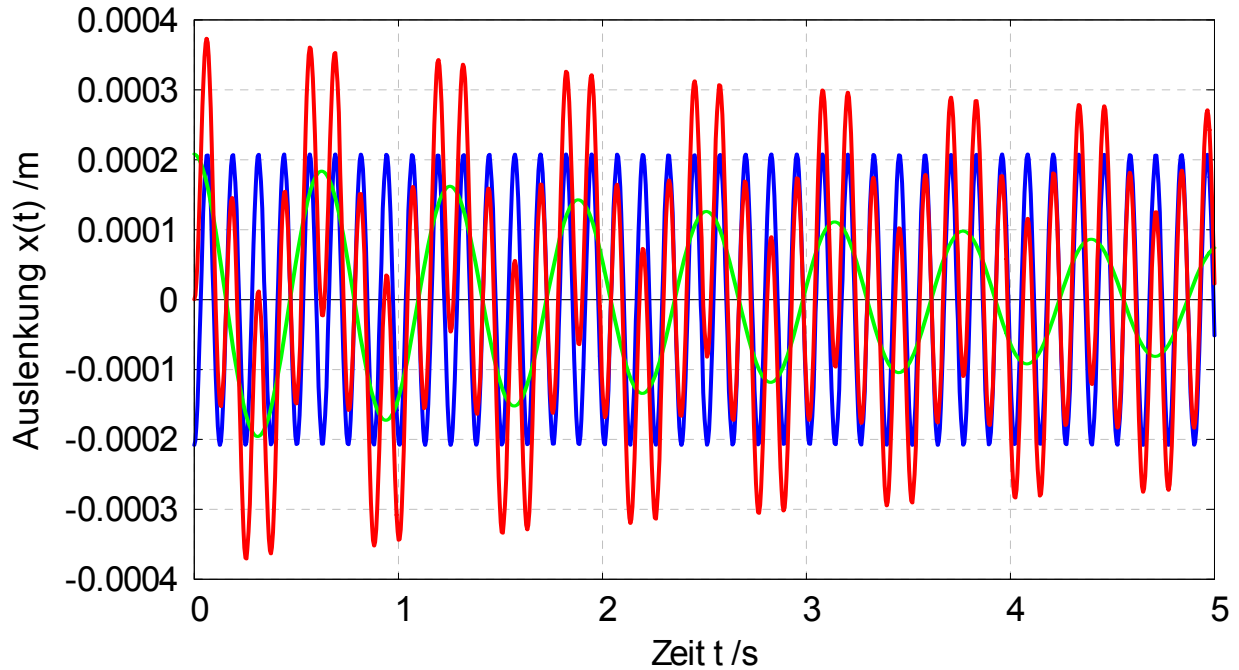
Einschwingvorgang bei erzv. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)



Beispiel 6: $\omega_0 = 10 \frac{1}{s}$, $\omega_E = 50 \frac{1}{s}$, $\delta = 0,2 \frac{1}{s}$

Erregerfrequenz sehr viel größer als Eigenfrequenz („hochfrequente Anregung“),
sehr kleine Amplitude, komplizierter Einschwingvorgang
(geänderte Zeitskala beachten!)

Einschwingvorgang bei erz. Schwingungen ($x(0) = 0$, $v(0) = 0$)



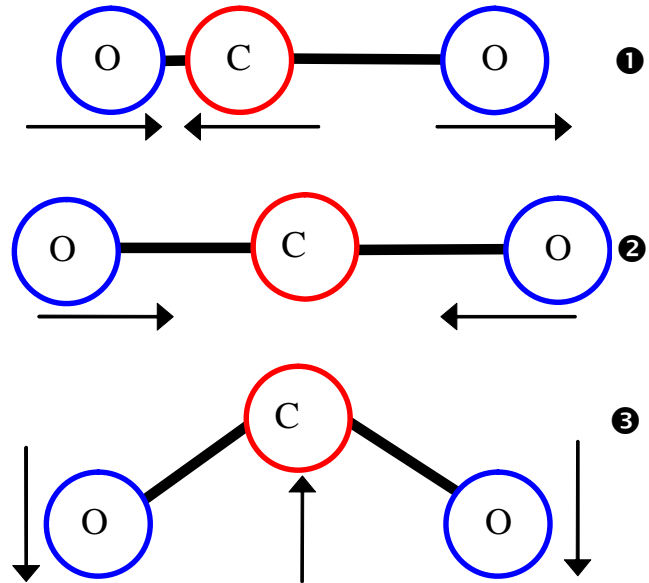
4.1.4 Gekoppelte Oszillatoren

Häufig sind schwingungsfähige (elektrische, mechanische ...) Systeme miteinander gekoppelt. Wenn ein Oszillator schwingt, dann wird durch seine Schwingung auf einen anderen eine „äußere Kraft“ ausüben und diesen zu Schwingungen anregen. Dieser wirkt dann auch auf den ersten zurück

.....

Beispiel:

Atome in einem Molekül (z.B. CO₂) können um eine Gleichgewichtslage herum schwingen (Molekülschwingungen). Die Bindungskräfte zwischen den Atomen kann man sich vereinfacht wie Federn vorstellen. Wenn nun ein Atom aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, so überträgt sich die „Störung“ auf die anderen Atome. Je nachdem, welche Atome gleich- / gegenphasig schwingen (und in welche Richtung) ergeben sich verschiedene Schwingungsmoden mit unterschiedlichen Frequenzen.



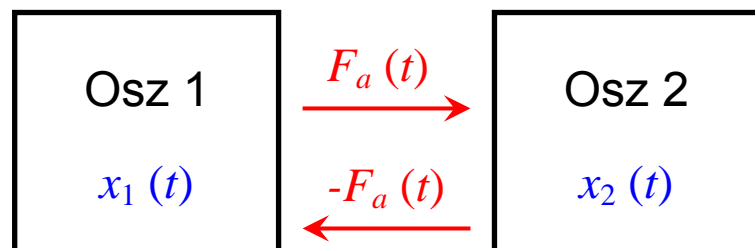
Bei CO₂ ergeben sich so z.B. 3 versch. Schwingungsmoden mit den Frequenzen $f_1 = 71 \cdot 10^{12}$ Hz, $f_2 = 40 \cdot 10^{12}$ Hz und $f_3 = 20 \cdot 10^{12}$ Hz (entspr. Infrarotstrahlung der Wellenlänge 4.2 μm , 7.4 μm und 15.9 μm).

Im Gegensatz zu den im Kap. 4.1.3 behandelten „erzwungenen Schwingungen“ ist die „äußere Kraft“ bei gekoppelten Oszillatoren nicht mehr eine fest vorgegebene Funktion der Zeit, sondern sie hängt von der aktuellen Auslenkung der beteiligten Oszillatoren ab!

Durch die Kopplung wird die Schwingung (und die damit verbundene Energie!) von einem Oszillator an den nächsten „weitergegeben“. Wenn viele Oszillatoren beteiligt sind, so kann sich die „Störung“ im Raum ausbreiten, es bildet sich eine Welle aus:

- „Störung“ (Auslenkung aus Gleichgewichtslage) breitet sich aus
- „viele“ Oszillatoren, räumlich getrennt
 - ↳ Ausbreitung der Schwingung im Raum
 - ↳ **WELLE**

Hier werden wir uns bei der Rechnung auf den einfachsten Fall, 2 gekoppelte Oszillatoren (Bsp.: zwei gek. Pendel) beschränken.



- Mit **2** Oszillatoren erhält man ...

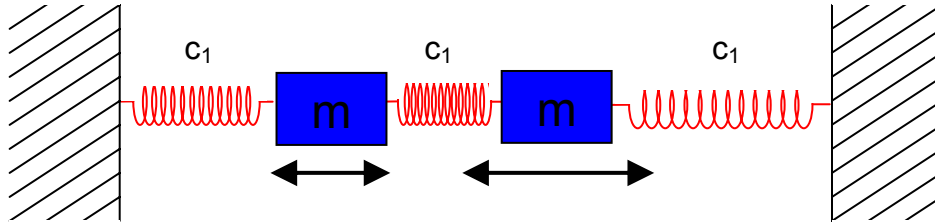
→ **2** Freiheitsgrade

2 Fundamentalschwingungen

2 versch. Frequenzen → Schwebungen

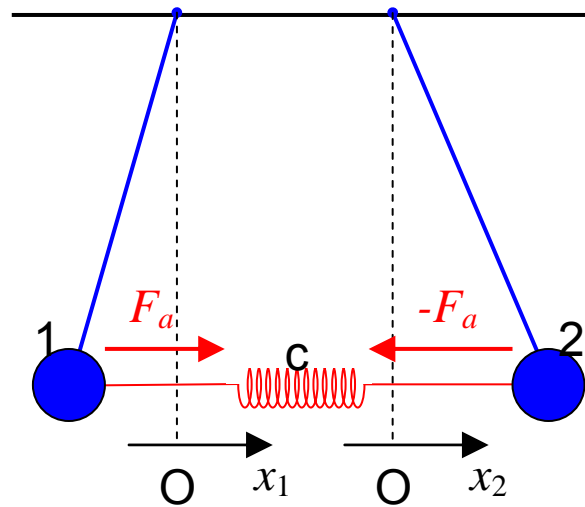
Beispiele:

a) Gekoppelte Masse-Feder-Schwinger



b) Gekoppelte Pendel

- 2 gleiche Pendel (ω_0)
- über Feder verbunden (c)
- Kopplung: $F_a = -c \cdot (x_1 - x_2)$



Newton II:

$$\textcircled{1} \quad m \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m \cdot \omega_0^2 \cdot x_1 = F_a = -c(x_1 - x_2)$$

$$\textcircled{2} \quad m \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m \cdot \omega_0^2 \cdot x_2 = -F_a = +c(x_1 - x_2)$$

$$\text{mit } \omega_0^2 = \frac{g}{L} \text{ (für Pendel) } \quad \text{bzw.} \quad \omega_0^2 = \frac{c_1}{m} \text{ (für M-Feder-Schw.)}$$

Abkürzung: $\gamma^2 = \frac{c}{m}$

System von gek. DGL.:

$$\textcircled{1} \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x_1 = -\gamma^2(x_1 - x_2)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x_2 = +\gamma^2(x_1 - x_2)$$

Gleichung ① und ② enthalten beide die gesuchten Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, können also nicht unabhängig voneinander gelöst werden!

„Trick“: „Entkopplung“ der 2 DGL durch Transformation $x_1 \pm x_2$:

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x_1 - \omega_0^2 \cdot x_2 = -\gamma^2(x_1 - x_2) - \gamma^2(x_1 - x_2)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot (x_1 - x_2) = -2\gamma^2(x_1 - x_2)$$

Die ist eine DGL für die Unbekannte $(x_1 - x_2)$, Abk.: $y_1 = x_1 - x_2$

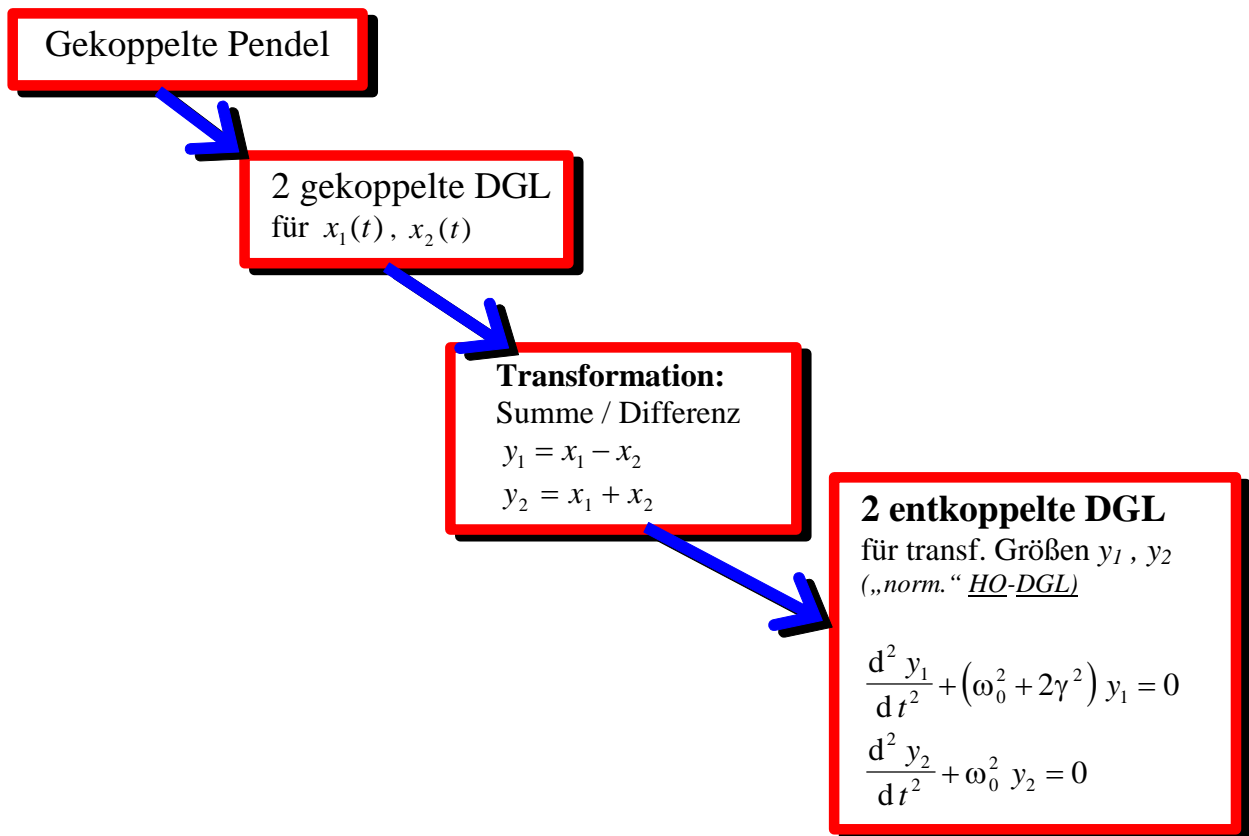
$$\boxed{\frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\gamma^2)y_1 = 0} \quad \text{[Gl.4.1.80.]}$$

ebenso ...

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$, mit $y_2 = x_1 + x_2$

$$\boxed{\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \omega_0^2 y_2 = 0} \quad \text{[Gl.4.1.81.]}$$

Zusammenfassung Kap. 4.1.4 bis hier ...



Lösung dieser 2 DGL für y_1 u. y_2 sind uns bereits bekannt – harmonische Schwingungen, Frequenz ergibt sich aus dem Koeffizient vor y_1 (bzw. y_2):

$$y_1(t) = A_1 \cdot e^{j\omega_1 t + \varphi_1}, \quad \text{mit } \omega_1^2 = (\omega_0^2 + 2\gamma^2) \quad \text{HO mit Kreisfreq. } \omega_1$$

$$y_2(t) = A_2 \cdot e^{j\omega_0 t + \varphi_2} \quad \text{HO mit Kreisfreq. } \omega_0$$

Gesucht sind allerdings x_1 und x_2 , d.h. die Funktionen, die die „richtige“ Bewegung der Oszillatoren beschreiben!

Mit $y_1 = x_1 - x_2$

$y_2 = x_1 + x_2$

↪ „Rücktransformation“: $x_1 = \frac{y_2 + y_1}{2}$ [Gl.4.1.82.]

$x_2 = \frac{y_2 - y_1}{2}$ [Gl.4.1.82.]

(y_1, y_2) sind harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen (ω_0, ω_1) , x_1 und x_2 ergeben sich also als ...

Überlagerung von 2 Schwingungen mit versch. Frequenzen

... ein Phänomen, das nicht nur bei gekoppelten Pendeln auftritt !

Wir behandeln rechnerisch nur den Spezialfall, dass die 2 zu überlagernden Schwingungen gleiche Amplitude und gleichen Nullphasenwinkel haben. Der allg. Fall ist nicht wirklich komplizierter (aber etwas umständlicher, da mehr Konstanten auftreten und die Funktionen etwas länger werden).

Für das Bsp. der gekoppelten Pendel bedeutet dies, dass wir die Pendel so anstoßen müssen, dass sich für (y_1, y_2) die folgenden speziellen Anfangsbedingungen ergeben:

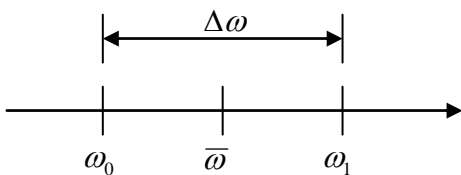
$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ gleiche Phase

$A_1 = A_2 = A$ gleiche Amplitude

Damit wird

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) = \frac{1}{2}A \cdot (e^{j\omega_0 t} + e^{j\omega_1 t}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}A \cdot (e^{j\omega_0 t} - e^{j\omega_1 t})$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass die 2 Frequenzen sich nur wenig unterscheiden (im Falle gekoppelter Oszillatoren bedeutet dies „schwache Kopplung“).



Dann ist es sinnvoll, statt (ω_0, ω_1)

die mittlere Kreisfreq. $\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}$ [Gl.4.1.83.]

und

die Differenz $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ [Gl.4.1.83.]

zu verwenden. (Bei schwacher Kopplung/geringem Frequenzunterschied ist dann $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$.)

Mit $\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$ und $\omega_0 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}$ lassen sich die beiden harm. Fkt. schreiben als ...

$$e^{j\omega_1 t} = e^{j\bar{\omega} t} \cdot e^{j\frac{\Delta\omega}{2} t} \quad \text{u.} \quad e^{j\omega_0 t} = e^{j\bar{\omega} t} \cdot e^{-j\frac{\Delta\omega}{2} t}$$

Vorteil: der gemeinsame Faktor $e^{j\bar{\omega} t}$ kann bei der Überlagerung ausgeklammert werden!

$$x_1(t) = \frac{1}{2} A \cdot e^{j\bar{\omega}t} \cdot \underbrace{\left(e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t} + e^{+j\frac{\Delta\omega}{2}t} \right)}_{e^{-j\varphi} + e^{+j\varphi} = 2\cos\varphi},$$

$$= \frac{1}{2} A \cdot e^{j\bar{\omega}t} \cdot 2 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} A \cdot e^{j\bar{\omega}t} \cdot \underbrace{\left(e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{+j\frac{\Delta\omega}{2}t} \right)}_{e^{-j\varphi} - e^{+j\varphi} = -2j\sin\varphi}$$

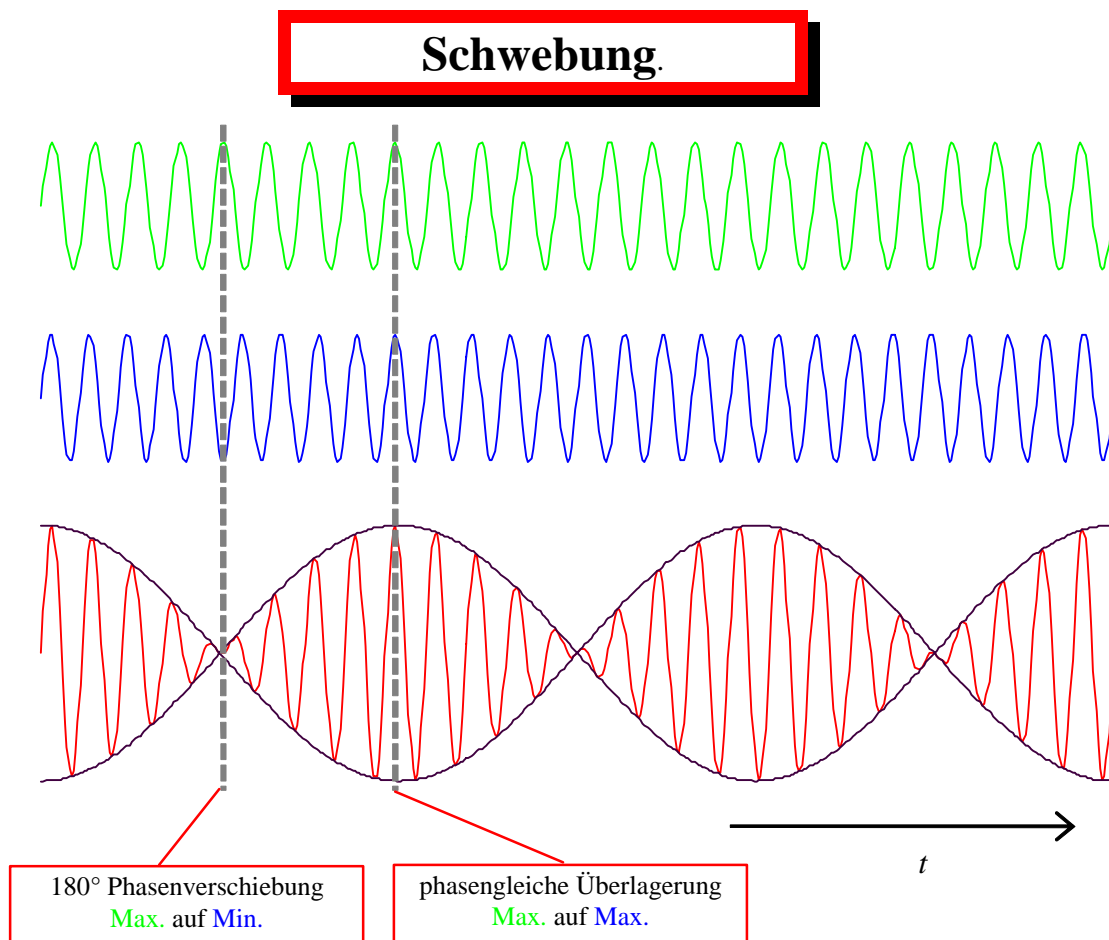
$$= \frac{1}{2} A \cdot e^{j\bar{\omega}t} \cdot (-j) 2 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Die sind beides harm. Fkt. mit der mittl. Frequenz $\bar{\omega}$, aber multipliziert mit einem Faktor, der die Differenzfrequenz $\Delta\omega$ enthält. x_1 u. x_2 unterscheiden sich in beiden Teilen jeweils nur in der Phase (Faktor $-j$ bzw. \sin / \cos). Geht man wieder zum (physikalischen) Realteil über, so ergibt sich ...

$$x_1(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(\bar{\omega}t) \quad [\text{Gl.4.1.84.}]$$

$$x_2(t) = A \cdot \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \sin(\bar{\omega}t) \quad [\text{Gl.4.1.85.}]$$

Die Bedeutung dieser 2 Fkt. wird klar, wenn wir jetzt den Fall der schwachen Kopplung betrachten, bzw. allgemein die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden, d.h. $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$. Dann variiert die Funktion $\cos(\bar{\omega}t)$ mit der mittl. Frequenz $\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}$ sehr schnell. Die Amplitude dieser (schnellen) Schwingung ist moduliert mit dem (langsam variierenden) Faktor $\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)$, d.h. die Amplituden schwellen langsam an und wieder ab, man erhält eine



Schwebungen spielen z.B. eine wichtige Rolle beim „Stimmen“ von Musikinstrumenten. Hier führen kleine Frequenzunterschiede zu Schwebungen. \Rightarrow Es wird so lange nachjustiert, bis die Schwebung verschwindet.

Die Umkehrung der oben durchgeführten Rechnung hat große Bedeutung in der Nachrichtentechnik: Wenn ein Signal näherungsweise wie eine harm. Fkt. $\cos(\bar{\omega}t)$ aussieht, aber eine nicht konstante Amplitude $A(t)$ hat, so enthält dieses Signal nicht nur die Freq. $\bar{\omega}$ sondern ein Frequenzgemisch!

Ähnliche Effekte werden benutzt, um ein HF-Signal durch Mischen mit einem HF Oszillator auf einen niedrigeren Frequenzbereich umzusetzen (Prinzip des „Superheterodyn“- (Überlagerungs-) Empfängers). Auch hier werden die Signale nichtlinear (bzw. multiplikativ) überlagert.

Die Schwingungsamplitude ist immer dann maximal, wenn $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) = +1$ **oder** -1 wird. Für den zeitl. Abstand zwischen 2 Schwebungsmaxima (bzw. Minima) gilt deshalb $\frac{\Delta\omega}{2} \cdot T_s = \pi$. Die Schwebungsfrequenz f_s ist deshalb gleich der Differenzfrequenz:

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = f_1 - f_0 \quad (\text{Kreisfreq. der Schwebung: } \omega_s = \omega_1 - \omega_0 = \Delta\omega) \quad [\text{Gl.4.1.86.}]$$