

3.2 Elektromagnetische Felder

3.2.1 Elektrostatische Kräfte

3.2.1.1 Coulombgesetz

Beob.: el. geladene Körper üben Kraft aufeinander aus

		Anziehung	Abstoßung
+	+	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
+	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-	+	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

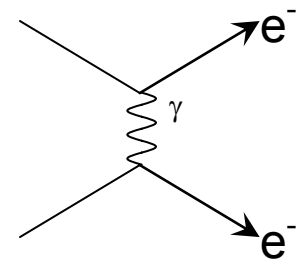
➤ Was ist elektrische Ladung ????

➤ Ursache der Kraft ?

Historisch: a.) Versuch alle Kräfte als Nahwirkungskräfte zu erklären (mit geheimnisvollen Hebeln, Stangen, Kugelschalen, Äther ... ⇒ kompliziert, widersprüchlich ⇒ gescheitert
b.) Fernwirkungskräfte (Newton, Gravitation!), math. beschrieben durch „Feld“
⇒ aus der Sicht der modernen Physik (Relativität, Quantenphysik) problematisch (⚡ wie, wie schnell kommt die „Wirkung“ von der Quelle zum Körper, auf den eine Kraft wirkt ? ⚡ Wie breiten sich Änderungen im Raum aus?). Eine momentane Übertragung widerspricht der Relativität!

Heute: Fundamentale Wechselwirkungen werden durch Austauschkräfte beschrieben: zwischen wechselwirkenden Teilchen werden (virtuelle) „Feldquanten“ (und damit Energie u. Impuls) ausgetauscht („2 Hunde – 1 Knochen“).

Die elektromagnetische Wechselwirkung wird durch Austausch von Lichtquanten, den Photonen, beschrieben. Z. B. WW zwischen 2 Elektr. (einfachster Fall, Austausch eines einzelnen Photons γ) :



Vergleich:

Elektrostatik

anziehend (wenn $q_1 q_2 < 0$) oder
abstoßend (wenn $q_1 q_2 > 0$)

2 „Sorten“ Ladung: + / -

Kraft entlang Verbindungslinie

$$\text{Kraft} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Kraft} \propto q_1 q_2$$

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Prop.-Konstante in SI-Einheiten:

$$k = 8.988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Gravitation

nur anziehend

nur eine: Masse, $m > 0$

wie El.-Statik

wie El.-Statik

$$\text{Kraft} \propto m_1 m_2$$

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

[Gl.3.2.1.]

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Aus historischen Gründen wird statt k aber meist $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ geschrieben:

$$\text{Coulomb-Gesetz } \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad [\text{Gl.3.2.2.}]$$

(Kraft zwischen zwei Punktladungen!)

3.2.1.2 Elektrostatisches Feld

Kraft auf „Probeladung“ q am Ort \vec{r} , erzeugt durch Ladung Q bei O:

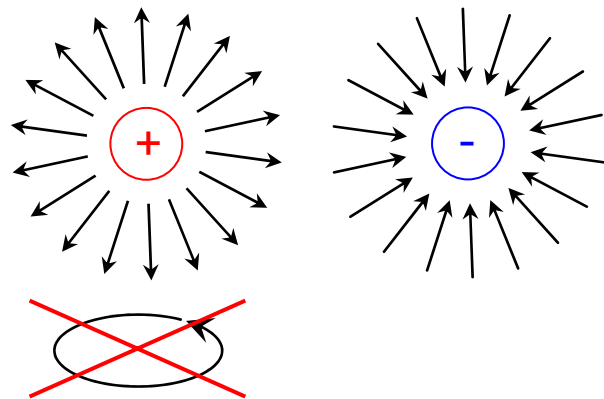
$$\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \right\}}_{\vec{E}(\vec{r})}$$

Ausdruck in der Klammer $\{ \dots \}$: Eigenschaft, die dem Raum zugeordnet wird eine Ladung an diesem Ort erfährt eine Kraft von $q \cdot \{ \dots \}$! (vergl. Gravitation) \Rightarrow **FELD**

Elektrost. Feld einer Punktladung bei O: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ [Gl.3.2.3.]

• El. Feldstärke Kraft pro Ladung: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ [Gl.3.2.4.]

- **Feldlinien** **beginnen/enden** an **positiven/negativen** Ladungen (+/- Ladungen sind „**Quellen/Senken**“ des Feldes
Im freien Raum (ohne Ladungsträger) gibt es keine Quellen/Senken (Feldlinien beginnen/enden **nur** an el. Ladungen!
- Das elektro**statische** Feld hat **keine Wirbel**, keine geschlossenen Feldlinien!



nur bei zeitl. veränderl. E-Feld!

Das elektro**statische** Feld ist ein k.....es Feld (s. Kap. 1.3.2.3) !

- Newton-Gesetze: Kräfte werden vetoriell überlagert \Rightarrow **gilt auch für \vec{E} -Feld !**
 \Rightarrow **Superpositionsprinzip**
- Für ausgedehnte Ladungsverteilungen gelten (mit entspr. Abänderungen) die gleichen Formeln wie für ausgedehnte Massenverteilungen (s. Grav., Volumen-Integral ...)

3.2.1.3 Elektrischer Dipol

- Einfachst „Anordnung“ elektrischer Ladungen: eine (*Punkt*-) Ladung \Rightarrow „elektr. Monopol“
- Viele Moleküle (z.B. H₂O) sind zwar elektrisch neutral, aber die positiven/negativen Ladungen „sitzen“ nicht an der gleichen Stelle ...
Solche Ladungssysteme haben zwar kein „Monopol-Feld“ (=Coulombfeld) aber ein **Dipol-Feld**.
- **Elektrischer Dipol**: 2 Ladungen $+Q, -Q$ im Abstand d

- El.-Dipolmoment (Vektor!) : $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$ [Gl.3.2.5.]

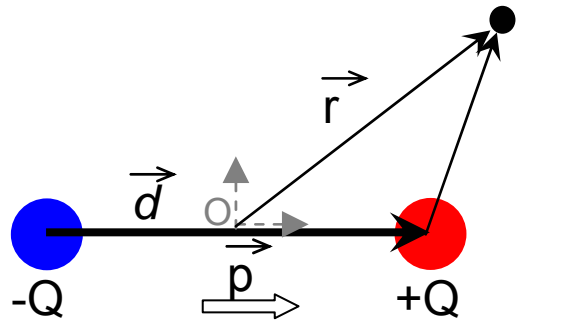
Feld eines Dipols am „Aufpunkt (●) \vec{r} “:

Überlagerung des Felds zweier

Punktladungen bei $\pm \vec{d}/2$...

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}}{|\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}|^3} - \frac{\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}}{|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}|^3} \right\}$$

[Gl.3.2.6.]



speziell ...

- a.) Aufpunkt auf Dipol-Achse ($\vec{r} \parallel \vec{d}$!), „weit weg“ vom Dipol, d.h. $|\vec{r}| \gg |\vec{d}|$:

dann ist auch $\vec{E} \parallel \vec{d}$, d.h. \vec{E} in Richtung der Dipol-Achse!

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|r - \frac{d}{2}|^2} - \frac{1}{|r + \frac{d}{2}|^2} \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{|1 - \frac{d}{2r}|^2} - \frac{1}{|1 + \frac{d}{2r}|^2} \right\}$$

$$\approx 2 \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \quad \text{für } d \ll r$$

[Gl.3.2.7.]

- b.) In der Mittelebenen ... ähnliche Rechnung (ÜBUNG!) ... : $E(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$ [Gl.3.2.8.]

Welche Richtung hat das E-Feld in dieser Ebene ?

- ⇒ Dipolfeld fällt schneller ab ($1/r^3$) als Feld einer Punktladung,
Vorfaktor hängt vom Winkel zur Dipolachse ab!

3.2.1.4 Elektrischer Kraftfluß und Gaußscher Satz

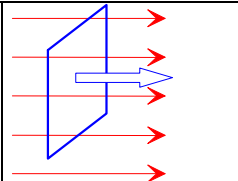
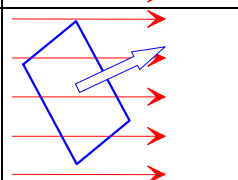
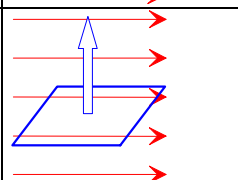
Berechnung elektr. Felder wird mittels **Gaußschem Satz** vereinfacht, insbes. dann wenn

- Symmetrien ausgenutzt werden können
- wenn Metallflächen vorliegen und zwischen diesen definierte Spannungen anliegen (dann ist nicht von vorneherein bekannt, welche Ladungen sich dort an welcher Stelle befinden!)

Bem.: E-Feld steht an der Metalloberfläche immer senkrecht zur Oberfläche - warum?

Def.: Elektr. „**Kraftfluß**“ Φ (SKALAR!!)

ein Maß für die „Anzahl der **Feldlinien**, die durch eine **Fläche Δa** laufen“

$\theta = 0^\circ$: $\Delta\Phi = \vec{E} \Delta a$	
$\theta \neq 0^\circ$: $\Delta\Phi = \dots$	
$\theta = 90^\circ$: $\Delta\Phi = \dots$	

Allgemein ... $\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{a}$ (Skalarprodukt!) [Gl.3.2.9.]

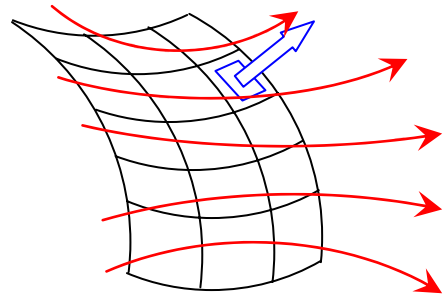
Dabei wird die Fläche beschrieben durch den Vektor $\Delta\vec{a}$:

Richtung \perp Fläche, „Normalenvektor“ (bei geschlossenen Flächen zeigt $\Delta\vec{a}$ nach außen!)

Bei gekrümmten Flächen, nicht konstantem \vec{E} ...

\Rightarrow Übergang zu infinitesimalem Flächenelement und Integration über die Gesamtfläche S („Oberflächenintegral“):

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad \Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$



Gesamter Fluß einer Punktladung Q:

$$\Phi = \int d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{a}}{r^2}$$

($\oint \dots d\vec{a}$: Integral über geschlossene Fläche)

Von „Q aus gesehen“ ist $d\Omega = \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{a}}{r^2}$ das

Raumwinkелеlement,

der volle Raumwinkel ist 4π ,

$$\oint d\Omega = 4\pi \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

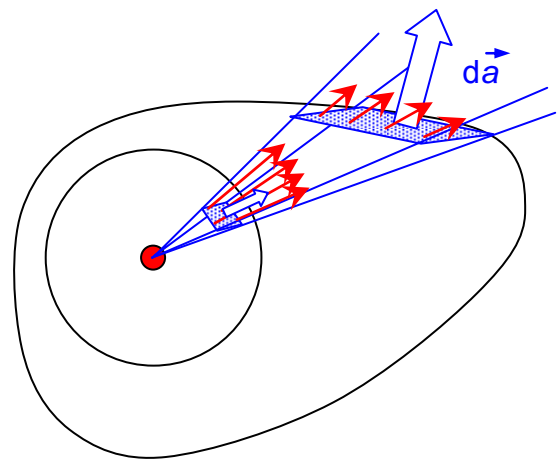
oder ... Integration über Kugeloberfläche :

$$\Phi = \int d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(r) \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

\Rightarrow unabhängig vom Radius

\Rightarrow unabhängig von der Form der einhüllenden Fläche

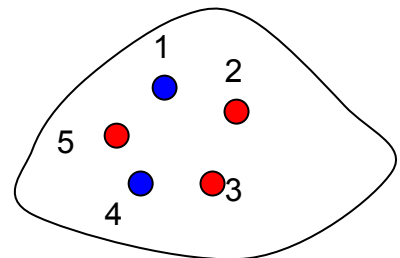
\Rightarrow nur abhängig von der gesamten eingeschlossenen Ladung Q



mehrere (Punkt-) Ladungen innerhalb einer einhüllenden Fläche:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{a} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \frac{Q_3}{\epsilon_0} + \dots$$



Gaußscher Satz: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0}$

[Gl.3.2.10.]

Bem.: Der Gaußsche Satz „enthält“ das Coulomb-Gesetz, ist aber allgemeiner, da er nicht die Richtungsunabhängigkeit (sphärische Symmetrie) des E-Feldes voraussetzt. Im Falle einer

ruhenden Ladung (Isotropie \Leftrightarrow keine Raumrichtung bevorzugt!) folgt aus Gauß' und der „Isotropie des Raumes“ das Coulomb-Gesetz.

Bei bewegten Ladungen ist das Feld nicht mehr symmetrisch sondern in der Ebene quer zur Flugrichtung konzentriert (ein relativistischer Effekt!), so daß das Coulombgesetz nicht mehr gilt- der Gaußsche Satz gilt auch dann noch!

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

Ladungsdichte ρ : $dq = \rho(x, y, z) \cdot dV$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{Vol.} \rho dV$ [Gl.3.2.11.]

Übungsbeispiele zur Anwendung des Gaußschen Satzes

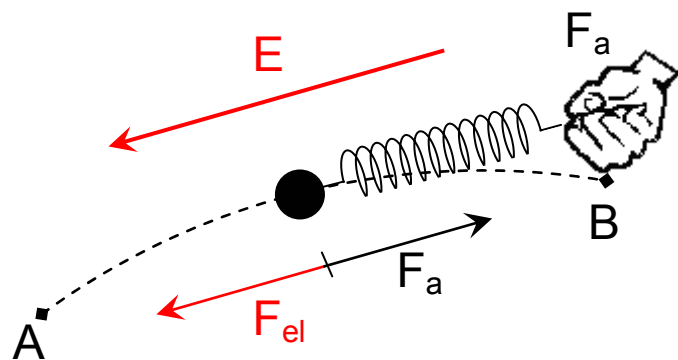
Berechnen Sie das elektrostatische Feld ...

1. einer „ ∞ -langen Linienladung“ (langer dünner Draht), Ladung pro Länge $\lambda = \frac{Q}{l}$
2. einer „ ∞ -ausgedehnten Flächenladung“ (große homogen geladene Fläche),
Ladung pro Fläche $\sigma = \frac{Q}{A}$
3. von 2 Flächenladungen $\pm\sigma$ (Abstand d)
4. einer homogen geladenen Kugel (Ladungsdichte ρ)
5. einer (in y- u. z-Richtung ∞ -ausged.) homogen gelad. Platte (Ladungsd. ρ) der Dicke d
6. eines Zylinderkondensators (Innen-/Außenradius r_i / r_a)
7. eines Kugelkondensators (Innen-/Außenradius r_i / r_a)

Wie erhält man bei 3., 6., 7. die Kapazität des Kondensators

3.2.1.5 Elektrostatisches Potential

- Körper wird in einem Kraftfeld bewegt
 \Rightarrow Arbeit wird verrichtet (vergl. Kap. 1.3.2)
Auf Körper wirkt elektrost. Kraft
 $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$
- K. wird mit äußerer Kraft gegen E-stat.-Kraft von A nach B bewegt: $\vec{F}_a = -\vec{F}_{el} = -q\vec{E}$
- Arbeit: $W = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = -\vec{F}_{el} \cdot \vec{s}$
allg.: $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$
(siehe auch: „Berechnung der potentiellen Energie, Kap. 1.3.2.5 !)

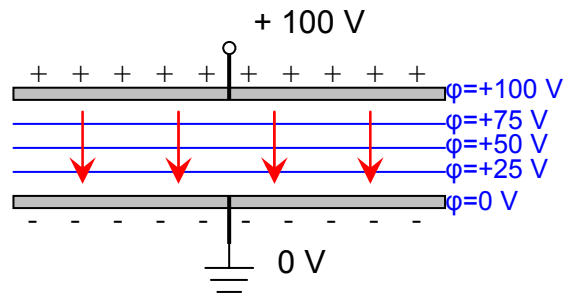


Elektrostatisches Feld hat keine Wirbel \Leftrightarrow jedem Raumpunkt kann eine skalare (Potential-) Funktion $\varphi(x, y, z)$ zugeordnet werden (vergl. auch: Landkarte/Höhenlinien/Steigung...):

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{1}{q} W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [\text{Gl.3.2.12.}]$$

- der Punkt, an dem $\varphi = 0$ gilt, kann beliebig gewählt werden
- Potentialdifferenz (= Spannung !) zwischen

zwei Punkten:
$$U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Äquipotentiallinien (-flächen):

$\varphi(x, y, z) = const. \Rightarrow \perp$ auf E-Feld !

- Potential: „Höhenliniendarstellung des E-Feldes“
 \vec{E} -Feld (Vektor) u. φ -Feld (Skalar) beschreiben gleichen phys. Sachverhalt!
- E-Feld \Leftrightarrow **Integration** \Leftrightarrow Potential
- Potential \Leftrightarrow **Differentiation** \Leftrightarrow E-Feld

E-Feld = „Gefälle im Potential-Gebirge“

Richtung : steilster Abfall des Potentials (R. des negativen **Gradienten**)

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} = -\text{grad}(\varphi) = -\vec{\nabla}\varphi \quad [\text{Gl.3.2.13.}]$$

Dabei ist $\vec{\nabla}$ der „Nabla-Operator“,

formal
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [\text{Gl.3.2.14.}]$$

Wird der „Nabla-Operator“ auf eine skalare Funktion (hier : φ) „angewendet“, so wird dies formal wie die Multiplikation des Vektors $\vec{\nabla}$ mit dem Skalar φ interpretiert, wobei dann aber Multiplikation mit $\frac{\partial}{\partial x}$ (etc.) wieder die partielle Differentiation nach x (etc.) bedeutet.

Bsp.:

1. Potential im Innern eines Plattenkondensators:

$\varphi(x, y, z) = 25 \text{ V / cm} \cdot z$

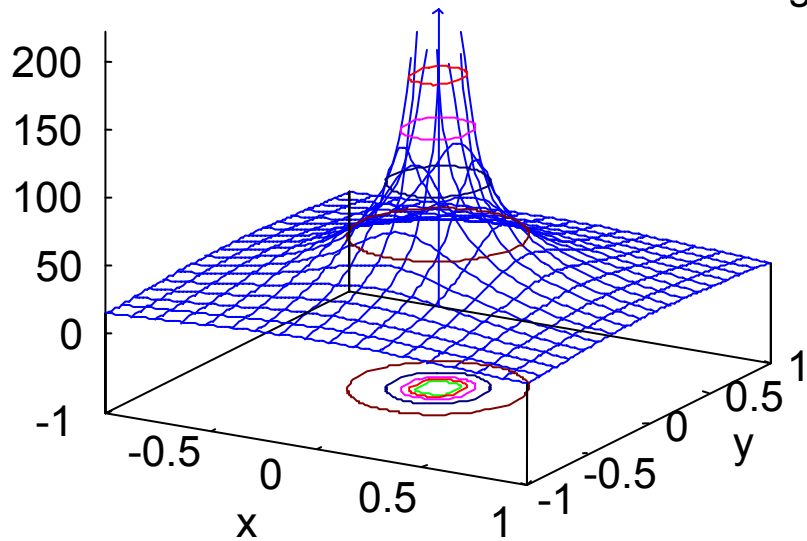
$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

1. Potential einer Punktladung:
E-Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Äquipotentialfl. sind konzent. Kugeln,
Potential hängt nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ab
wähle: $\varphi = 0$ bei $r = \infty$

Elektrostat. Potential einer Punktladung



$$\varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot \vec{e}_r \, dr = -\int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \, dr$$

$$\varphi(r) = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

[Gl.3.2.15.]

(s.a. Gnuplot-File „coul_pot.plt“)

Übung: aus $\varphi(r)$ wieder das E-Feld berechnen ...!

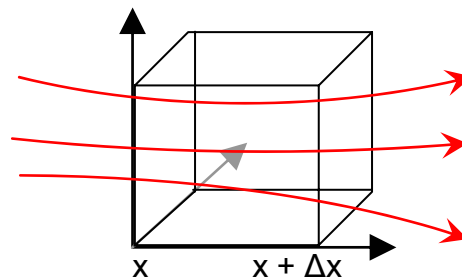
⇒ auch für Potential gilt Superpositionsprinzip!

- mehrere Punktladungen, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$

Bsp.: Potential eines **Dipols**: Potential zweier Punktladungen (+Q, -Q) bei versch. Positionen
(s.a. Gnuplot-File „dip_pot.plt“)

- Ladungsverteilung ...

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\text{Vol.}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV'$$



Gaußscher Satz angew. auf kleinen Quader

Ecken bei $(x, y, z), (x + \Delta x, y, z) \dots (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

Achtung: Das Symbol Δ wird für verschiedene „math. Objekte“ verwendet

1. **hier**: (kleine) Veränderungen von x, y, z, \dots : $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$
2. Laplace-Operator (angew. auf Fkt., z.B. $\Delta\varphi(x, y, z)$) ⇒ siehe unten!

$$\oint_{\text{Quader}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

$$\overbrace{\{E_x(x + \Delta x) - E_x(x)\}}^{\text{rechts / links}} \cdot \Delta y \Delta z + \overbrace{\{E_y(y + \Delta y) - E_y(y)\}}^{\text{hinten / vorne}} \cdot \Delta x \Delta z + \overbrace{\{E_z(z + \Delta z) - E_z(z)\}}^{\text{oben / unten}} \cdot \Delta x \Delta y = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

$$\frac{E_x(x + \Delta x) - E_x(x)}{\Delta x} + \frac{E_y(y + \Delta y) - E_y(y)}{\Delta y} + \frac{E_z(z + \Delta z) - E_z(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \dots, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \dots, \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \dots$

$$\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{\text{div } \vec{E}} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Quellen/Senken des Feldes \Leftrightarrow Ladungen

„**Divergenz**“ des \vec{E} -Feldes \Leftrightarrow Ladungsdichte

Auch die **Divergenz** (eines Vektorfeldes, hier des \vec{E} -Feldes) läßt sich formal mit dem **Nabla** Operator schreiben.

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad ! \quad (\text{Skalarprodukt!})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Mit elektrost. Potential ...

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{E}) = -\underbrace{\left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\}}_{\text{"Laplace-Operator } \Delta \varphi"} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poisson-Gl.:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

[Gl.3.2.16.]

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

speziell im freien Raum (keine Ladungsträger):

Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

[Gl.3.2.17.]

$$\Delta \varphi = 0$$

Hier ist „ Δ “ der „**Laplace-Operator**“ : formal $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, wobei aber auch der

„Operator“ Δ immer auf eine Funktion (hier : φ) „angewendet“ werden muß:

$$\Delta \varphi = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad !$$

Formal ergibt sich der Laplace-Operator als Quadrat des Nabla-Operators:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \quad (\text{Skalarprodukt !})$$

Elektrostatik (und viele andere techn./wiss. Probleme) :

Lösung der **Laplace-Gleichung** für gegebene **Randbedingungen!**

Bsp. für Poisson- bzw. Laplace-Gleichung:

- Feld im Plattenkondensator - nur x-abhängig! **1-dimensional**, $\varphi = \varphi(x)$:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = -E(x) = -E_0 = \text{const.}$$

$$\varphi(x) = -E_0 \cdot x + \varphi_0$$

$$\text{Randbed. : } \varphi(0) = 0, \varphi(D) = U$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = 0, E_0 = -\frac{U}{D}$$

$$\varphi(x) = \frac{U}{D} \cdot x$$

- ähnlich: Feld in Raumladungszone eines Halbleiters ... aber jetzt: $\rho \neq 0$!
- **2-dim.** : Kabel, Leitung ... lang (in z-Richtung), End-Effekte vernachlässigbar, $\varphi = \varphi(x, y)$,

unabhängig von z ! $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

- **3-dim.**: $\varphi = \varphi(x, y, z)$ von allen 3 Koord. abh.! $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Randbed.: vorgeg. Spannungen der Metallteile ...

Lösung ? „Potentialtheorie“, Gaußscher Satz,
analog. phys. Problem (z.B. Seifenblasen)

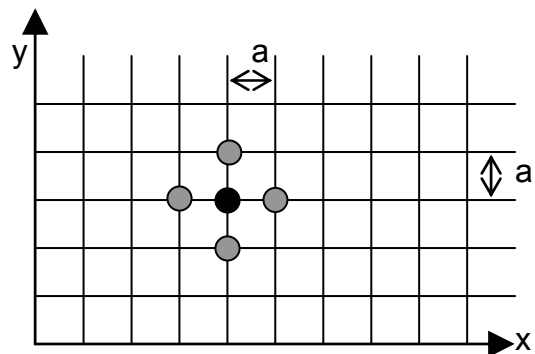
oder **numerische** Berechnung
z.B. **Relaxationsverfahren**

Relaxationsverfahren

Potential wird auf „Gitterpunkten“ berechnet,

(Gitterabstand: a)

- beliebiger Punkt (x, y) auf Gitter
- Mittelwert der φ 's der 4 (3-dim.: 6)
Nachbarpunkte:



$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4} \{ \varphi(x-a, y) + \varphi(x, y+a) + \varphi(x, y-a) + \varphi(x+a, y) \}$$

Taylor-Entwicklung \Rightarrow

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \frac{1}{4} \left\{ \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} a^2 + \dots a^3 + \dots \right. \\ & + \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} a^2 + \dots a^3 + \dots \\ & + \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} a^2 + \dots a^3 + \dots \\ & \left. + \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} a^2 + \dots a^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4} \left\{ 4\varphi(x, y) + 0 + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)}_{\text{Laplace-Op.}} a^2 + \dots a^3 + \dots \right\} \Rightarrow \varphi(x, y) \approx \bar{\varphi}$$

$\Delta\varphi=0!$

➤ Laplace-Gl. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$ Potential auf beliebigem Gitterpunkt

= Mittelwert aus Nachbarpunkten!

➤ **Iterationsverfahren:**

1. Randbedingungen auf entspr. Gitterpunkten (Potential auf Metallflächen) **fest** vorgeben
2. „Nicht-Randpunkte“ mit „beliebigen“ Potentialwerten initialisieren (z.B. alle = 0 Volt)
3. Nacheinander für jeden „Nicht-Randpunkt“ ...
 - Potential durch Mittelwert aus Nachbarwerten ersetzen
4. Schritt 3. wiederholen, bis Potentialwerte sich „nicht mehr ändern“

Das so gefundene Potential ...

- ist eine Lösung der Laplace-Gleichung !
- und
- erfüllt die Randbedingungen !

Beispiel \Rightarrow siehe File RELAXATN.XLS (Berechnung und Grafik mit MS-Excel)

Hinweis: Für iterative Berechnungen („Zirkelbezüge“) müssen Sie folgende Einstellungen vornehmen

Berechnen ...

auf Befehl

Iterationen

Berechnung starten mit F9!

(War in Vs. XXX bei „Extras / Optionen / Berechnen“ zu finden, aber Bill und seine Mannen ändern dies regelmäßig!)

Wenn Sie die Anzahl der Iterationen begrenzen (z.B. auf 5), dann können Sie sich Zwischenergebnisse in Ruhe ansehen.

3.2.2 Magnetische Kräfte

3.2.2.1 Bewegte elektrische Ladungen

Strom, Spannung, Widerstand, Ohmsches Gesetz, Stromkreise, Kirchhoffsche Regeln etc. ... kennen Sie aus der Schule bzw. werden in E-Technik ausführlich behandelt! Die entspr. Zusammenhänge werden hier als bekannt vorausgesetzt.
U.U. sollten Sie diese Kapitel in Ihrem Physikbuch aber doch noch mal kurz durchblättern!

Wieviele Elektronen sind in einem Draht ? Wie schnell bewegen sie sich ?

- Elektronen-Dichte in einem Leiter: $n_e = \frac{N_e}{V} = Z \cdot \frac{\rho N_A}{M}$ [Gl.3.2.18.]

Bsp. Cu: $Z = 29$ $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
 $\rho = 8.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ $M = 63.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$

$$\Leftrightarrow n_e = Z \cdot 8.5 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3 \quad (= 2.5 \cdot 10^{30} \text{ 1/m}^3)$$

(aber: nur 1 von 29 e^- trägt zum Strom bei!)

- SEHR GROSSE LADUNGSDICHTE
- riesige elektrostatischen Kräfte zwischen zwei Leitern ?

NEIN, denn der Leiter ist insgesamt **elektrisch neutral**, $+$ u- $-$ gleichen sich aus!

- $+$ $+$ abstoßende ...
- $-$ $-$ abstoßende ...
- $+$ $-$ anziehende ...
- $-$ $+$ anziehende ...

Kräfte heben sich **GENAU** auf !!!

Wie genau ist diese Ladungskompensation ? Könnten wir feststellen, ob sich Betrag der Elektronen- u. Protonenladung geringfügig unterscheiden (z.B. $q_e = -q_p \cdot 1.000000001$) ????

Bsp.: 2 Cu-Kugeln, je $V = 1 \text{ mm}^3 \Rightarrow Q_p = Q_e = 400 \text{ C} !$
 1 cm Abstand \Rightarrow Kräfte von $\pm 10^{19} \text{ N}$ heben sich gegenseitig auf!
 \Rightarrow Betrag von Elektronen- u. Protonenladung **sehr genau** gleich !

Übung: Wie groß müßte der Unterschied sein, damit die elektrost. Abstoßung stärker als die Gravitation (z.B. zw. Erde u. Mond) wird ?

- Strom** \Leftrightarrow Ladungen bewegen sich FAQ: **wie schnell?**

Stromdichte (Strom/Querschnittsfläche): $|J| = \frac{|I|}{A} = n_e \cdot |q_e| \cdot |v_e|$ [Gl.3.2.19.]

(Stromdichte-Vektor: $\vec{J} = n_e \cdot q_e \cdot \vec{v}_e$)

Bei bekannter Elektronendichte kann damit für geg. Stromdichte die Elektronengeschw. berechnet werden!

Bsp. Cu (1 Leitungsekt./Atom): $n_e = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3$
 Querschnitt $A = 1 \text{ mm}^2$, $I = 40 \text{ A}$ (ziemlich viel für 1 mm²)
 $v_e = \frac{I}{A \cdot n_e \cdot e} \approx 3 \text{ mm/s} !$... ziemlich langsam !!!

Zusammenfassung:

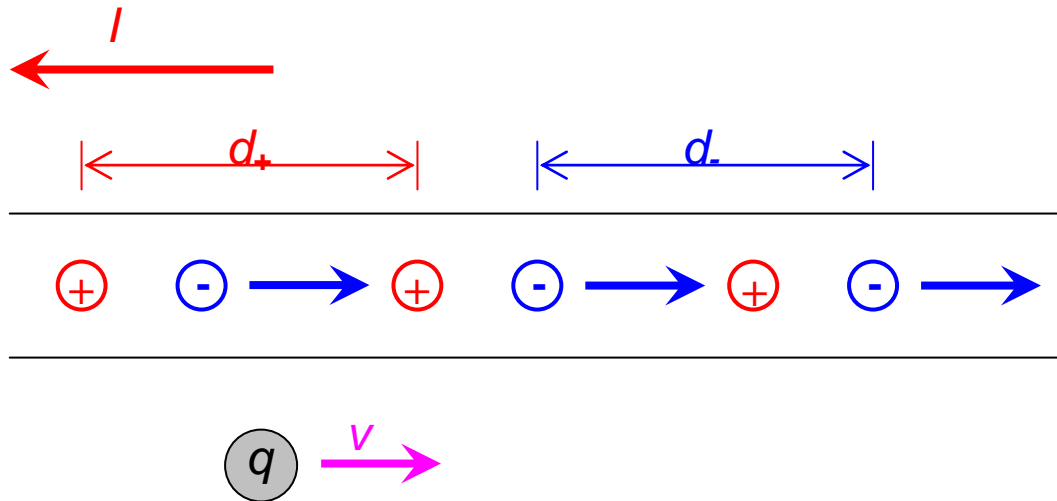
- im Leiter sind **SEHR VIELE** elektr. Ladungen, diese bewegen sich **SEHR LANGSAM**
- SEHR GROSSE** elektrost. Kräfte heben sich **SEHR GENAU** weg, weil der Leiter insgesamt **SEHR GENAU** elektrisch **NEUTRAL** ist

Rechnung:

Modell eines Leiters (Draht)

und eines mit der **Geschw. v** parallel zum Draht fliegenden Körpers mit der Ladung q :

- **positive** Ladungen im Draht ruhen
- **negative** Ladungen (Elektronen) bewegen sich mit Geschw. v_e
- **positive** / **negative** Ladungen haben Abstand d_+ / d_- voneinander
Modell: fester Abstand, real: $d_+ / d_- \approx$ mittlerer Abstand



1. Draht ist elektrisch neutral:

$$\Rightarrow \lambda_+ + \lambda_- = 0 \quad , \quad \frac{+e}{d_+} + \frac{-e}{d_-} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_+ = d_-$$

(λ : „Linienladung“ = Ladung/Länge)

Im Laborsystem haben **positive** / **negative** Ladungen gleichen Abstand: $d_+ = d_-$.

ABER: **positive** Ladungen sind in Ruhe, **negative** Ladungen bewegen sich.

2. Der „Beobachter“ im Labor „sieht“ den Abstand zwischen den bewegten Elektronen **Lorentz-kontrahiert!** Dieser (kontrahierte) Abstand ist so groß wie der zwischen den (ruhenden) positiven Ladungen :

$$d_- = d'_- \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad (d'_- : \text{Abstd. im } e\text{- Ruhesystem, } \beta = \frac{v_e}{c})$$

$$d_- < d'_-$$

$$\text{Daraus berechnen wir } d'_- = \frac{d_-}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad . \quad [\text{Gl.3.2.20.}]$$

➤ Aus der Sicht eines **bewegten Beobachters**, der sich mit der **Geschw. v** bewegt ...
(für diesen Beobachter ruht die Ladung q (s. Skizze))

Spezialfall (vereinfacht die Rechnung!!!) : $v = v_e$, d.h. auch die Elektronen im Draht ruhen für diesen speziellen Beobachter (allg. Fall : siehe Literatur, z.B. Orear).

Bewegter Beobachter

1. e^- Abstand ist jetzt d'_- (Abstand größer \nearrow , **Dichte kleiner** \searrow)

2. $+$ bewegen sich \Rightarrow Abstände Lorentz-kontrahiert !

$$d'_+ = d_+ \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

(Abstand kleiner \searrow , **Dichte größer** \nearrow)

$$d'_+ < d_+$$

3. Wg. den veränderten Abständen ist die Linienladung im bew. System **nicht Null**.

$$\lambda' = \frac{+e}{d'_+} + \frac{-e}{d'_-} = \frac{+e}{d_+ \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{-e \sqrt{1-\beta^2}}{d_-}$$

$$= \lambda_+ \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} \right)$$

$$\text{da } \frac{e}{d_+} = \frac{e}{d_-} = \lambda_+$$

$$= \lambda_+ \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Die im bew. System auftretende Linienladung ist abh. von der Geschwindigkeit!

Frage: Woher kommt eigentlich die „Überschußladung“ ?

4. Die Linienladung λ' erzeugt ein **elektrostatisches Feld** (E-Feld)

Berechnung des E-Feldes (im Abstand r vom Draht) z.B. mit Gaußschem Satz:

$$E'(r) = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Auf (im bew. System) **ruhende** Ladung q wirkt die **elektrostatische** Kraft

$$F' = qE' = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda'}{r} = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_+}{r} \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \underbrace{(\lambda_+ v)}_{=I} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\approx 1}$$

\Rightarrow Auf die Ladung wirkt eine **Kraft**, die **proportional** zu **Strom I** und **Geschwindigkeit v** ist!

... diese Kraft bewirkt eine Beschleunigung des Körpers mit der Ladung q , diese ist natürlich auch im Laborsystem beobachtbar.

(Kraft und Beschleunigung müssen allerdings auch noch L-transformiert werden. Im Ergebnis

kein großer Unterschied, lediglich bei $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wird das „ ≈ 1 “ durch „ $= 1$ “ ersetzt)

$$F = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot I \cdot v \quad [\text{Gl.3.2.21.}]$$

Diese Gl. gilt auch wieder für den (oben nicht durchgerechneten) Fall, daß v und v_e verschieden sind! (Die Elektronen-Geschwindigkeit v_e ist in I versteckt)

Es ist $\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0$ ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$) die sog. „magn. Feldkonstante. [Gl.3.2.22.]

Die durch den Strom I bewirkte Kraft auf die Ladung q kann damit folgendermaßen geschrieben werden:

$$F = q \cdot \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}_B \cdot v = q \cdot B \cdot v \quad \text{LORENTZ-KRAFT} \quad [\text{Gl.3.2.23.}]$$

Dabei ist $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ein „neues“ Feld, das (abhängig von Strom I u. Abstand r) die Wirkung auf eine **bewegte Ladung** beschreibt! B heißt „magn. Induktion“, „magn. Flußdichte“ oder einfach B-Feld. Der Begriff „magnet. Feldstärke“ ist im dt. Sprachgebrauch für das „H-Feld“ vergeben. Im Vakuum gilt $B = \mu_0 \cdot H$.

Das „Magnetfeld“ ist eine für praktische Berechnungen unentbehrliche Größe. Das B-Feld erlaubt es, die Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen zu beschreiben, **aber ...**

- ◆ Wir haben bei der Herleitung der **Lorentzkraft** aber kein Magnetfeld gebraucht, sondern das **E-Feld im bewegten Bezugssystem** berechnet!
- ◆ Ob eine Kraft als „magnetische“ oder als „elektrische“ Kraft erscheint (oder beides), ist eine Frage des **Bezugsystems!**
- ◆ **Magnetismus** ist also letzten Endes ein **relativistischer Effekt!**

Elektromagnetische Felder können allerdings auch anders betrachtet werden (indem man z.B. von der L-Kraft zwischen bewegten Ladungen ausgeht und dann das Bezugssystem wechselt ...). Durch L-Transformation eines B-Feldes ergibt sich ein E-Feld.

- ◆ Elektrische und magnetische Kräfte bzw. Felder sind zwei Erscheinungsformen des selben physikalischen Phänomens, des **Elektromagnetismus**.
- ◆ Beim Übergang zwischen versch. Bezugssystemen müssen die elektrischen und magnetischen Felder Lorentz-transformiert werden! (Formeln dazu \Rightarrow Literatur)
- ◆ Auf dieser „Verwandtschaft“ zwischen E- und B-Feld beruht u.a. das **Induktionsgesetz** oder die Ausbreitung von **elektromagnetischen Wellen** im Raum!
- ◆ Die Feldgleichungen der elektromagnetischen Felder wurden von Maxwell vor der Relativitätstheorie gefunden, sind aber erstaunlicherweise relativistisch korrekt (siehe Kap. 2.3)!

Fragen:

- Welche Richtung hat die Lorentzkraft? Unterscheiden Sie $q > 0$, $q < 0$!
- Was ändert sich, wenn q in die andere Richtung fliegt? Hat eine zu \vec{v}_e bzw. \vec{J} senkrechte Komponente der Geschwindigkeit \vec{v} einen Einfluß auf die L-Kraft? 2 Fälle ...!!!

3.2.2.2 Magnetfeld, magn. Induktion, Lorentzkraft

➤ bewegte elektrische Ladungen \Rightarrow Lorentzkraft auf andere bewegten Ladungen

L-Kraft kann mittels **MAGNETFELD** („magn. Induktion“ oder „magn. Flußdichte“) \vec{B} -Feld berechnet werden.

$$[B] = \text{T} (= \text{Tesla}), 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2} \quad [\text{Gl.3.2.24.}]$$

Zum Vergleich B-Feld ...

1. Erdmagnetfeld (am Äquator): ca. $3 \cdot 10^{-5}$ T
2. Kernspintomograph (supraleitende Spule): ca. 1.5 T

Ein Magnetfeld ...

- wird durch **bewegte** elektr. Ladungen (Strom) **erzeugt**
- bewirkt eine Kraft auf **bewegte** elektr. Ladungen (Lorentzkraft)

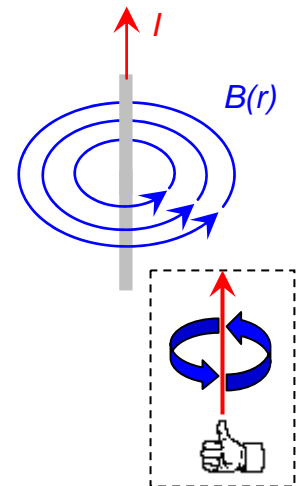
Wo sind bei einem Permanentmagneten / einem Stück Eisen / ...
die bewegten Ladungen „versteckt“ ?

Ein stromdurchflossener gerader Leiter erzeugt ein r -abhängiges B -

Feld aus konzentrischen Ringen der Stärke $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Richtung: tangential, Rechte-Hand-Regel!

Die B -Feldlinien haben keinen Anfang u. kein Ende, sie sind stets geschlossen. Das B -Feld ist also quellenfrei ($\text{div } \vec{B} = 0$)!



Anmerkung/Ergänzung:

Berechnung von B -Feldern aus gegebener Stromverteilung

- Die Gleichung $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$ gilt nur für einen einzelnen, geraden Leiter. Sie entspricht

deshalb etwa dem Coulomb-Gesetz ($E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$) in der Elektrostatik (oder dem

Newtonschen Gravitationsgesetz). In der Elektrostatik (bzw. Gravitation) haben wir gelernt (?), daß wir auch das Feld von Ladungs- (Massen-) Verteilungen mit komplizierterer Geometrie mit Hilfe des Superpositionsprinzips und dem Coulombgesetz (Newtonschen Gravitationsgesetz) berechnen können.

Dieser Methode entspricht in der Magnetostatik das **Biot-Savartsche Gesetz**:

$$\begin{aligned} &\text{B-Feld, das von einem inf. Leiterstück } d\vec{s}, \\ &\text{in dem der Strom } I \text{ fließt, im Abstand } \vec{r} \text{ erzeugt wird: } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{(d\vec{s} \times \vec{e}_r)}{r^2} \\ &(\vec{e}_r: \text{Einheitsvektor in Richtung } \vec{r}) \end{aligned} \quad [\text{Gl.3.2.25.}]$$

Durch Integration (nicht immer ganz einfach ...) erhält man dann \vec{B} .

- In der Elektrostatik kann das Problem der Feldberechnung in Spezialfällen durch Ausnutzung gewisser Symmetrien stark vereinfacht werden (Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{vol.}} \rho dV). \quad \text{In der Magnetostatik kann in solchen Fällen das}$$

„Durchflutungsgesetz“ oder „**Amperesche Gesetz**“ (Mathe: Stokesscher Satz) verwendet werden: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \vec{J} d\vec{a}$. Das Flächenintegral über die Stromdichte \vec{J} ergibt den

Strom, der vom geschlossenen Integrationsweg C des B -Linienintegrals ($\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$)

eingeschlossen wird. Damit wird $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$.

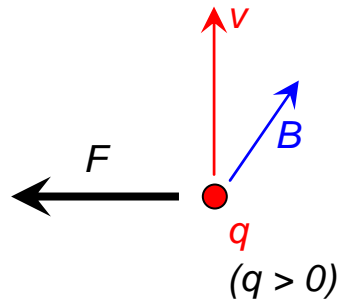
Direkte Anwendung dieser Beziehung : Strommeßzange !

- Die Feldberechnung in der Elektrostatik wird wesentlich vereinfacht, wenn an Stelle von \vec{E} zunächst das (skalare) Potential φ berechnet wird (Berechnung z.B. durch Lösung der Laplace-Gl.). In der Magnetostatik kann in ähnlicher Weise zunächst ein „Vektorpotential“ \vec{A} berechnet werden (z.B. durch Lösung der Laplace-Gl. für A_x, A_y, A_z).

Auf Einzelheiten kann hier nicht weiter eingegangen werden! \Rightarrow Literaturur: z.B. Orear, Kap.18.

Für die **Lorentz-Kraft** auf eine bewegte Ladung q gilt ...

- $|\vec{F}| \propto q$
- $|\vec{F}| \propto |\vec{v}|$ $|\vec{F}| \propto |\vec{B}|$
- $\vec{F} \perp \vec{v}$ $\vec{F} \perp \vec{B}$

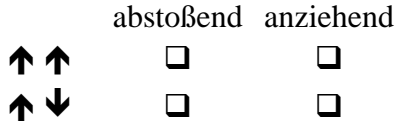


Diese 5 Beziehungen lassen sich zu einer einzigen Vektor-Gl. zusammenfassen:

Lorentzkraft: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ [Gl.3.2.26.]

Einige durch die L-Kraft bewirkte Effekte ...

- Die L.-Kraft wirkt auch zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern. Diese ist abhängig von den Stromrichtungen ...

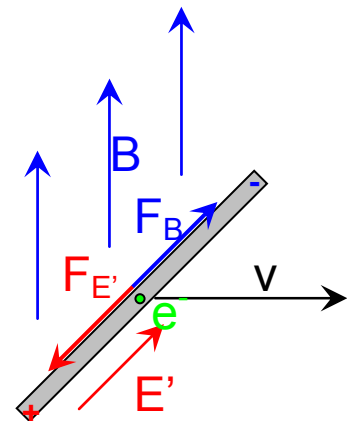


- Ein senkrecht zum B -Feld verlaufender, vom Strom I durchflossener Leiter (Länge l , Querschnittsfl. A , Anz. der Elektronen N , Elektronendichte n) erfährt die Kraft $\vec{F} = N_e \cdot (-e) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = n \cdot \underset{\text{Vol.}}{lA} \cdot (-e) \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

Mit $I = enA \cdot |\vec{v}|$ ergibt sich daraus $|\vec{F}| = I \cdot l \cdot |\vec{B}|$ [Gl.3.2.27.]

- Die bewegten Ladungsträger in einem Leiter in einem Magnetfeld werden durch die L-Kraft im Leiter abgelenkt (quer zur Stromrichtung) \rightarrow Hall - Effekt !

- Induktion:** Bewegt sich ein Leiter quer zu einem B -Feld, so werden die Ladungen so lange durch die Lorentz-Kraft F_B verschoben, bis sich ein elektr. Gegenfeld E' aufgebaut hat und die **elektrostatische Kraft** $F_{E'}$ die L-Kraft kompensiert: $q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) + q\vec{E}' = \vec{0}$, an den Enden des Leiters entsteht eine Potentialdifferenz vom Betrag $U = \Delta\varphi = l \cdot E' = lvB$!



Wie beschreibt ein mitbewegter Beobachter diesen Effekt ?

Bem.: Für den mitbewegten Beobachter ruhen die Ladungen im Draht, also gibt es keine Lorentzkraft!

Bewegung im Magnetfeld

Wie bewegt sich z.B. ein Elektronenstrahl in einem Magnetfeld ?

Wegen $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \dots$

- bewirkt die L.-Kraft eine Normalbeschleunigung (senkr. zur Geschw.!), verändert also nur die Richtung, nicht den Betrag der Geschw.!
- liegt der Beschl.-Vektor immer in der Ebene senkr. zu \vec{B} !
- hängt der Beschl.-Vektor nur von \vec{v}_\perp , der Geschw.-Komponente senkr. zu \vec{B} ab.

Rechnerisch ...

$$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$$

$$\vec{F} = q[(\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) \times \vec{B}] = q[\underbrace{\vec{v}_\parallel \times \vec{B}}_{=0}] + q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}]$$

$$\vec{F} = q[\vec{v}_\perp \times \vec{B}] \quad |\vec{F}| = |q| \cdot |\vec{v}_\perp| \cdot |\vec{B}|$$

Beispiel - homogenes B -Feld B_0 in z-Richtung:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \begin{pmatrix} +v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*) \quad |\vec{a}| = \frac{|q|}{m} \cdot \underbrace{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}_{v_\perp} \cdot B_0$$

- Beschleunigungsvektor in x-y-Ebene $\Rightarrow v_z$ ist konstant!
- Beschl. nur abh. von x- u. y-Komp. der Geschw., nicht abh. von v_z

Bewegungen

- in der Ebene senkrecht zu \vec{B} (.....)
- entlang der „ \vec{B} -Achse“ (gleichf. Geschw.)

sind unabhängig voneinander!

Wir betrachten vorläufig nur die Ebene senkrecht zu \vec{B} :

Lorentzkraft \Rightarrow Normalbeschleunigung \Rightarrow Geschw.-Betrag konstant !
Geschw.-Betr. konst. \Rightarrow Lorentzkraft (Betr.) konst. \Rightarrow gleichförmige Kreisbewegung !

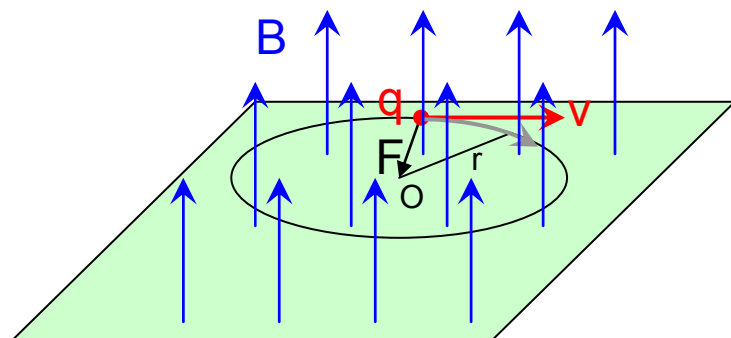
Rechnung: mit (*) erhält man 2

Gleichungen für die Geschw.-

Komponenten ($\vec{a} = \dot{\vec{v}}$!)

$$\dot{v}_x = +\frac{qB_0}{m} \cdot v_y \quad (1)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qB_0}{m} \cdot v_x \quad (2)$$



Dies sind 2 gekoppelt DGL. für v_x und v_y . Um eine Gl. mit einer unbek. Funktion zu erhalten differenzieren wir (1) noch einmal nach t und setzen (2) ein :

$$\ddot{v}_x = + \frac{qB_0}{m} \cdot \dot{v}_y$$

$$\ddot{v}_x = - \underbrace{\left(\frac{qB_0}{m} \right)^2}_{=\omega_c^2} \cdot v_x$$

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$$

Die ist die die DGL. eines **harmonischen Oszillators** mit der Lösung

$$v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \varphi_0) \quad [\text{Gl.3.2.28.}]$$

Eine ähnliche Gl. erhält man (wie ?) für v_y : $v_y(t) = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \varphi_0)$. [Gl.3.2.29.]

Die Geschwindigkeits-Komponenten in x- u. y- Richtung sind also jeweils harmonische Funktionen der Zeit mit der Kreisfrequenz ω_c .

Entsprechendes gilt für die Koordinaten x u. y selbst.

- Als Überlagerung erhält man in der x-y-Ebene eine Kreisbewegung mit der Kreisfrequenz/Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m} \quad \text{„Zyklotronfrequenz“} \quad [\text{Gl.3.2.30.}]$$

Die Zyklotronfrequenz heißt Zyklotronfrequenz weil sie z.B. die Frequenz eines Zyklotrons ist. Alles klar? Lesen Sie doch mal in Ihrem Physikbuch nach, was ein Zyklotron ist !

☞ Die Zyklotronfrequenz hängt nur von Ladung, Masse, Magnetfeld ab, **nicht** von der Geschwindigkeit (für $v \ll c$) !

- Die Geschwindigkeit beeinflusst dagegen den Bahn**radius** $R = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$. [Gl.3.2.31.]

Mit dem **Impuls** (senkr. zu \vec{B}) $p_{\perp} = mv_{\perp}$ ergibt sich $R = \frac{p_{\perp}}{qB_0}$. [Gl.3.2.32.]

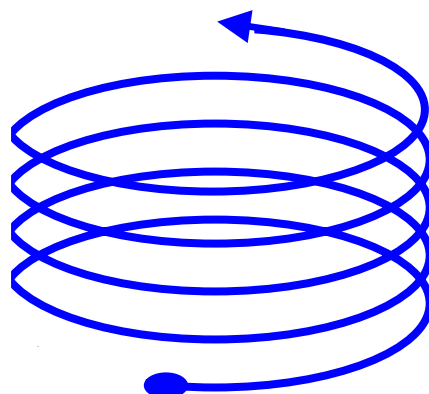
Bem.: Wenn die relativistische Formel für p verwendet wird, so gilt die letzte Formel auch für relativistische Geschwindigkeiten!

Insgesamt erhält man durch Überlagerung der Bewegung entlang der „ \vec{B} -Achse“ und der Bewegung in der Ebene senkrecht zu \vec{B} eine **Helix**.

Für $\vec{B} \parallel \hat{z}$ und Mittelpunkt bei (x_0, y_0) ...

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin(\omega_c t + \varphi_0) + x_0 \\ -R \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0) + y_0 \\ v_z \cdot t \end{pmatrix} \quad [\text{Gl.3.2.33.}]$$

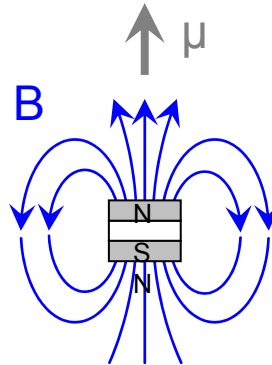
Für inhomogene B -Felder muß die Bahn i.allg. numerisch berechnet werden, mit der L-Kraft kann dann nur der lokale Bahnkrümmungsradius berechnet werden.



3.2.2.3 Magn. Dipolmoment

Magnetische Momente

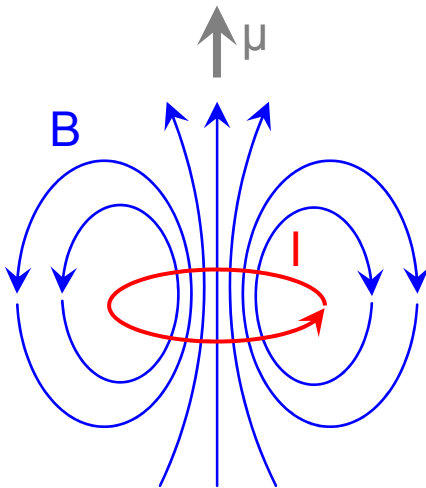
Magnetfeld eines Stabmagneten
und ...



... Magnetfeld eines **Kreisstroms**

ähneln (in einiger Entfernung) dem E-Feld eines elektr. Dipols.

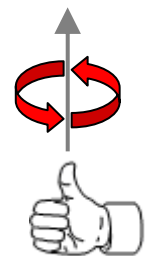
⇒ magnetisches Dipolfeld



Ähnlich wie beim elektr. Dipol (el. Dipolmoment $p = Q \cdot d$) wird zur Beschreibung der „Stärke“ des Dipols ein magn. Dipolmoment eingeführt. Es ergibt sich im Falle des Kreisstroms aus Stromstärke und Fläche der Leiterschleife:

$$\vec{\mu} = \vec{A} \cdot I \quad (I: \text{Strom, } |\vec{A}| : \text{Fläche der Leiterschleife}) \quad [\text{Gl.3.2.34.}]$$

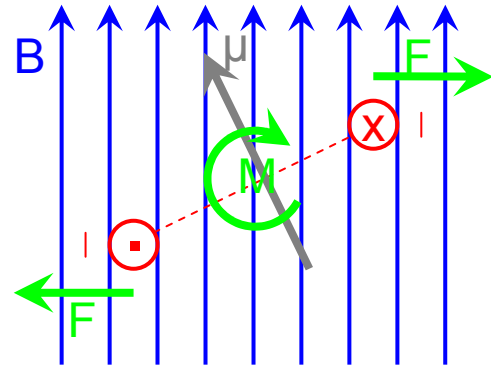
Richtung: Rechte-Hand-Regel



In einem externem **Magnetfeld** wirkt auf ein **Magn. Dipolmoment**

(z.B. auf eine Leiterschleife) ein **Kräftepaar**. Dieses bewirkt ein **Drehmoment**, das versucht, $\vec{\mu}$ parallel zu \vec{B} zu drehen:

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad [\text{Gl.3.2.35.}]$$



Wird der Dipol gegen dieses Drehmoment gedreht, so muß Arbeit verrichtet werden. Ein magn. Dipol hat deshalb in einem externen Magnetfeld eine zusätzliche potentielle Energie von ($E=0$ bei 90° bzw. ohne Feld)

$$E = \int_{\pi/2}^{\alpha} M d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} \mu B \sin \alpha d\alpha = -\mu B \cos \alpha$$

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$