3. Wechselwirkungen und Felder

- Mehrere (2, …) Körper können miteinander „wechselwirken“, z.B. durch „Kräfte“
- unter dem Einfluß einer „Kraft“ verändern sich Impuls, Energie, … der einzelnen Körper, Impulserhaltung, Energierehaltung … ⇨ Gesamtimpuls, Gesamtenergie, … bleibt erhalten
- „Wechselwirkung“ ist etwas allgemeiner als „Kraft“ : Teilchen können sich auch in andere umwandeln, auch die Masse kann sich dabei verändern.

  Bsp.: Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares (Ruhemasse je $9.1\ 10^{-31}$ kg) zu zwei Gammaquanten (Photonen, Ruhemasse Null)
  ⇨ ein Prozeß der „elektromagnetischen Wechselwirkung“
- „Kräfte“ zwischen Körpern können (klassisch) durch den Begriff des **Feld**es beschrieben (nicht erklärt !) werden.

  Man sollte sich klarmachen:
  Ein FELD ist eine abstrakte Größe, die uns die Rechnung erleichtert. Sehen, hören, riechen, schmecken, fühlen … kann man nicht das FELD, unter Umständen aber die phys. Größe, die durch das Feld mathematisch beschrieben wird (die Kraft könnte man z.B. fühlen)
- Die „klassische“ Physik beschreibt Kräfte durch solche abstrakten Felder und sucht nach Feldgleichungen: Gleichungen, die die räumliche/zeitliche Entwicklung der Felder und den Zusammenhang mit den „Verursachern“ der Felder (Quellen der Felder, z.B. elektr. Ladungen, Ströme, Massen) beschreiben.
- Die „moderne“ Physik versucht, Wechselwirkungen einheitlich dadurch zu erklären, daß gewisse Teilchen („Austauschteilchen“, „Feldquanten“) zwischen den wechselwirkenden Partnern hin- und herfliegen und dabei Energie, Impuls und andere phys. Eigenschaften transportieren.
- In der gesamten klassischen Physik (und damit Chemie, Biologie, Technik) gibt es nur drei Wechselwirkungen: elekrische Kräfte, magnetische Kräfte und Gravitation.
  Inzwischen kennen wir zwei weitere: die starke WW und die schwache WW.
  Seit Maxwell können elektrische und magn. Wechselwirkungen einheitlich beschrieben werden, sie sind nur zwei Erscheinungsformen der gleichen „Physik“, der „elektromagnetischen (em) Wechselwirkung“.
- Glashow, Weinberg, Salam (Nobelpreis 1979) u. andere haben die schwache WW mit der em-WW vereinheitlicht. Diese drei WW können also als versch. Erscheinungsformen der „elektroschwachen Wechselwirkung“ aufgefaßt werden!
- Bisher ist es noch nicht so richtig gelungen, auch die allerschwächste WW (die Gravitation) und die stärkste WW (die „starke WW“) mit der elektroschw. WW zu „verheiraten“.
  An theoretischen Versuchen dazu (Stichwort „TOE = **T**heory **O**f **E**verything“, “Weltformel“) mangelt es nicht …

3.1 Gravitation

Von den je nach Zählweise (siehe oben) 3..5 fundamentalen Wechselwirkungen ist ist schwächste WW, die Gravitation diejenige,

- die schon am längsten bekannt ist
- die uns im tägl. Leben stets begegnet (Gewicht), und uns deshalb „anschaulich“ erscheint

3.1.1 Newtonsches Gravitationsgesetz

A) Abhängigkeit der Gravitationskraft von der **Masse**

Newton: Erde übt Kraft auf "Apfel" aus, prop. zu Masse des Apfels.

Massenanziehung ist universelle Eigenschaft der Materie!

$\Rightarrow$ Auch der "Apfel" übt Kraft auf Erde aus, proportional zur Masse der Erde!

$$\boxed{F \sim m_A \cdot m_E} \qquad \text{[Gl.3.1.1.]}$$

B) Abhängigkeit der Gravitationskraft vom **Abstand ?**

Beschleunigung bei 2 Abständen bekannt:		
	a) Erdoberfläche	b.) Mondbahn
Abstand vom Erdmittelpunkt	R_E = 6370 km	r_M = 3.9 10^8 m
Beschleunigung	g = 9.81 m/s^2	$a_M = \omega^2 r_M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_M$ = ...? (T = 27.4 d)
Verhältnis der Abstände	**1 : 60**	
Verhältnis der Beschleunig.	**3600 : 1** **= 60^2 : 1**	
	$\Rightarrow F \sim \frac{1}{r^2}$	

$$F \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \text{(Gravitationskonstante G)} \qquad \text{[Gl.3.1.2.]}$$

Bestimmung der Grav.-Konstante: $\left.\begin{array}{ll} m_1, m_2, r & \text{bekannt} \\ F & \text{messen} \end{array}\right\} \Rightarrow G$

a.) Erde – Gravitationskraft auf der Erdoberfläche ist $F_G = mg$!

$$mg = G\frac{m \cdot m_E}{R_E^2} \Rightarrow G = g\frac{R_E^2}{m_E}$$

mit $m_E = \frac{4}{3} \cdot \pi R_E^3 \, \bar{\rho}_E$

$$\text{und } \bar{\rho}_E \approx 5\,\text{g/cm}^3 \Rightarrow G \approx 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2\text{kg}} \qquad \text{[Gl.3.1.3.]}$$

b.) Labor-Messung (extrem) kleiner Kräfte bzw. Drehmomente, Bsp.:

$$m_1 = 10\ \text{kg},\ m_2 = 10\ \text{kg},\ r = 0.1\ \text{m}$$

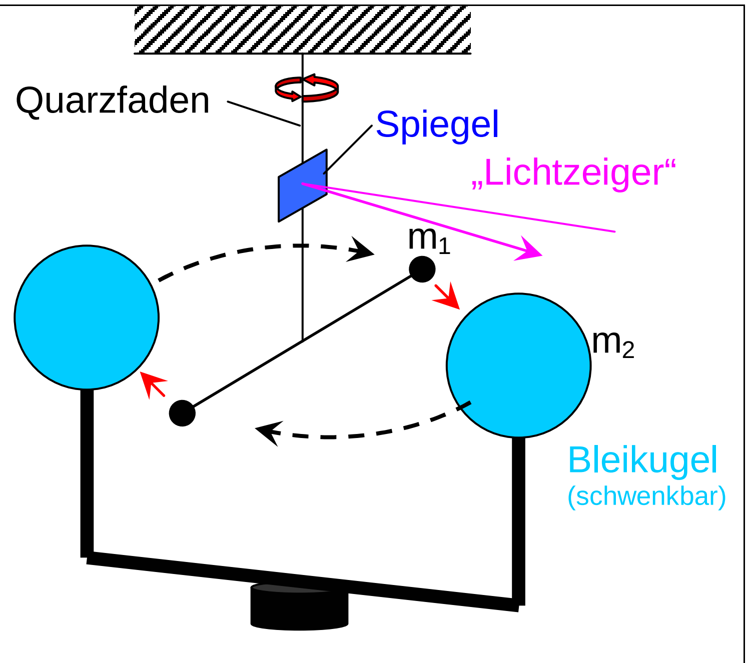
$$F \approx 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2\text{kg}} \cdot \frac{10 \cdot 10}{0.1^2} \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2} = 7 \cdot 10^{-7}\,\text{N}$$

Cavendish , Torsions - Drehwaage

Ergebnis:

$$G = (6.67259 \pm 0.00085)10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2\text{kg}}$$

[Gl.3.1.4.]

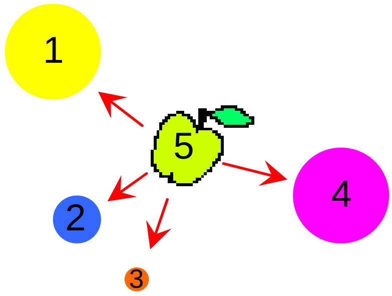


3.1.2 Gravitationsfeld

… bisher: 2 "*punktförmige*" Massen im Abstand *r* aber:

- Das Universum besteht nicht nur aus zwei Körpern - wie wird der 3., 4. , … Körper berücksichtigt ?
- Erde (u.a. Körper) sind nicht punktförmig - wann spielt Ausdehnung (und Form, Dichteverteilung etc.) der Körper eine Rolle ?

a.) Mehrere (> 2) "*Punkt*"-Massen:



Bsp.: 5 Körper - auf Körper Nr. 5 wirken 4 Kräfte:

1) Sonne $\Leftrightarrow$ Apfel $\vec{F}_{51}$
2) Erde $\Leftrightarrow$ Apfel $\vec{F}_{52}$
3) Mond $\Leftrightarrow$ Apfel $\vec{F}_{53}$
4) Jupiter $\Leftrightarrow$ Apfel $\vec{F}_{54}$

Allgemein: Gesamt-Kraft auf Körper "i":

$\Rightarrow$ Vektorsumme der Kräfte aller anderen Körper ("j") auf "i":

$$\vec{F}_i = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = m_i \underbrace{\left(\gamma \sum_{j\neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^2} \vec{e}_{ij} \right)}_{\vec{g}(\vec{r}_i)} = m_i \underbrace{\left(\gamma \sum_{j\neq i} \frac{m_j}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right) \right)}_{\vec{g}(\vec{r}_i)} = m_i \cdot \vec{g}(\vec{r}_i) \qquad \text{[Gl.3.1.5.]}$$

dabei ist $r_{ij} = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|$: Abstand Körper i $\leftrightarrow$ Körper j

$\vec{r}_i$: Ortsvektor Körper i

$\vec{e}_{ij} = \dfrac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|}$: Einkeitsvektor, Richtung i $\rightarrow$ j

$\vec{g}(\vec{r}_i)$: Gravitationsfeldstärke am Ort $\vec{r}_i$

„FELD" (Eigenschaft des Raumes, beschrieben als math. Funktion des Ortsvektors): Die Wirkung aller anderen Massen kann zu einer Fkt. des Ortsvektors zusammengefaßt werden ⇨ Gravitationsfeldstärke : $\vec{g}(\vec{r}_i)$ ("an der Stelle $\vec{r}_i$").

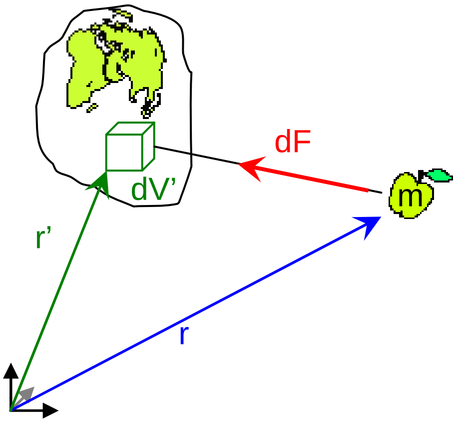
Anders ausgedrückt: Wir betrachten z.B. den Körper 5 („Apfel") mit der Masse m_5 am Ort $\vec{r}_5$.Die „Anderen" $j = 1,2\cdots, j \neq 5!$ erzeugen nun ein Feld, das am Ort $\vec{r}_5$ wirkt. Wenn man das Feld $\vec{g}(\vec{r})$ einmal kennt (bzw. berechnet hat), dann kann die Kraft auf einen Köper, z.B. Nr. 5 aus dem Feld als $\vec{F}_5 = m_5 \cdot \vec{g}(\vec{r}_5)$ berechnet werden, ohne dass man nur wieder die Einzelheiten über dieQuellen des Feldes benötigt!

b.) Ausged. Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung: ⇨ Dichte $\rho = \rho(x', y', z') = \rho(\vec{r}\,')$

Masse eines infinitesimalen (= ....) Volumenelements $\mathrm{d}V'$:

$$\mathrm{d}m' = \rho(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}V' \quad \left(= \rho(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}x' \cdot \mathrm{d}y' \cdot \mathrm{d}z'\right)$$

Kraft auf Masse m am Ort $\vec{r}$ durch ausged. Körper mit Dichte $\rho = \rho(\vec{r}\,')$:



① Kraft $\mathrm{d}\vec{F}$ zw. m und $\mathrm{d}m' = \rho\,\mathrm{d}V'$ berechnen:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \gamma \frac{m \cdot \mathrm{d}m'}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}\,'-\vec{r}} = m \cdot \left(\gamma \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r}) \cdot \mathrm{d}V' \right)$$

② über *„alle $\mathrm{d}V'$ summieren"*

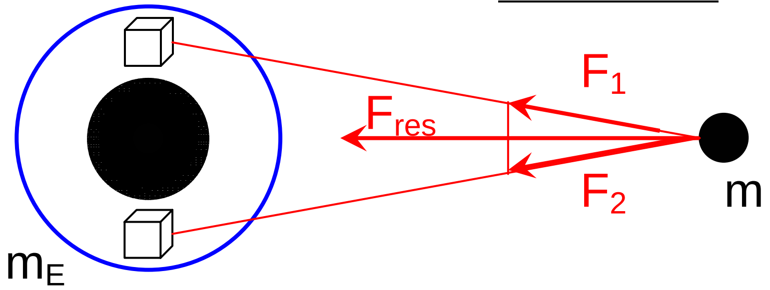
⇨ Integration über Volumen! ⇨ Gesamtkraft $\vec{F}$

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = m \cdot \gamma \int_{Vol.} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r}) \cdot \mathrm{d}V'$$

$$\left(= \iiint_{Vol.} \cdots \quad \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \right)$$

c.) <u>Kugelsymmetrische</u> Massenverteilung: ⇨ Dichte hängt nur von $r' = |\vec{r}\,'|$ ab: $\rho = \rho(|\vec{r}\,'|)$

<u>AUSSENRAUM</u>



- Kräfte ⊥ zur Verb.-Linie zum Mittelpunkt heben sich weg!
- Gesamtkraft entspr. Kraft zw. Punktmassen!

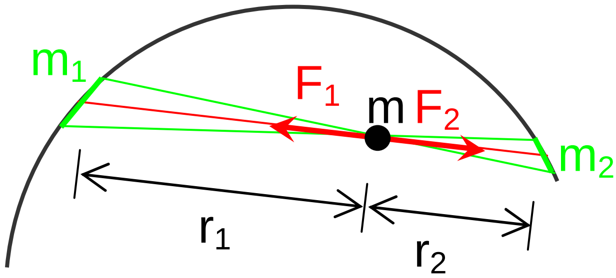
  mit r = Abst. der Mittelpunkte ⇨ $F = \gamma \dfrac{m_E \cdot m}{r^2}$

  Hinw.: *Beweis dieser Beziehung mit Gaußschem Satz, siehe Kap. „Elektrostatische Kräfte"*

<u>INNENRAUM</u>

1.) Im Innern einer **<u>Hohlkugel</u>** mit homogener Massenbelegung:

Wähle beliebigen Punkt im Innern, Kegel in beliebiger Richtung …

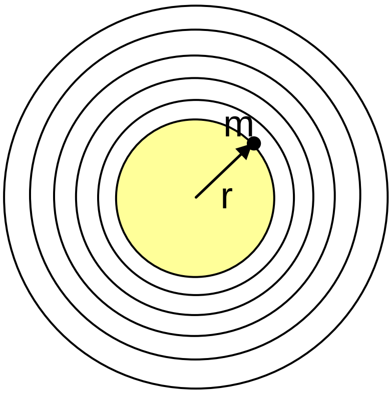


	①	②
Fläche	$A_1 \propto r_1^2$	$A_2 \propto r_2^2$
Masse	$m_1 \propto A_1 \propto r_1^2$	$m_2 \propto A_2 \propto r_2^2$

Kräfte	$\left|\vec{F}_1\right| \propto \frac{m_1}{r_1^2}$ $\left|\vec{F}_1\right| = const.\cdot\frac{r_1^2}{r_1^2}$	$\left|\vec{F}_2\right| \propto \frac{m_2}{r_2^2}$ $\left|\vec{F}_2\right| = const.\cdot\frac{r_2^2}{r_2^2}$
res. Kraft	$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_1\right| \quad , \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$!	
	Körper im Innenraum ist **KRÄFTEFREI !**	

2.) **Vollkugel**, Dichte $\rho = \rho(r')$:

Masse m bei Radius r :



- Äußere Kugelschalen ($r' > r$) bewirken keine Kraft auf Masse im Innern!
- Auf m wirkt nur Grav.-kraft der Innenkugel ($r' < r$) :

$$F = m \cdot \left(\gamma \frac{m_{Innenk.}}{r^2}\right)$$

mit $m_{Innenk.} = \int \rho(r')\,\mathrm{d}V' = \int_0^r \rho(r')\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$

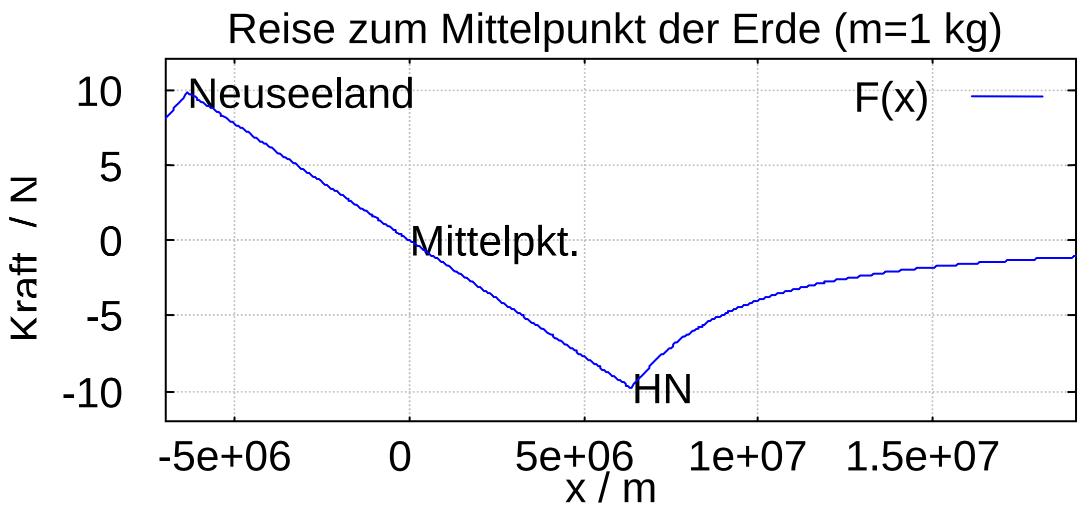
Speziell für die **homogene Kugel** ($\rho = const.$):

$$F = m\cdot\gamma\frac{1}{r^2}m_{Innenk.} = m\cdot\gamma\frac{1}{r^2}\rho\int_0^r 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = m\cdot\gamma\frac{1}{r^2}\rho\cdot\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

[Gl.3.1.6.]

$F = m\cdot\gamma\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r$ ➩ Kraft nimmt **linear** mit r zu (*)!

Wie bewegt sich ein Körper unter dem Einfluß einer solchen linearen Kraft ?
Wie lange dauert die Reise von HN nach NZ auf dem „direkten“ Weg?



* In Realität nimmt die Erdanziehung in einem Bergwerksschacht mit der Teufe zunächst nicht ab sondern **zu** !

Warum ? ....

3.1.3 Planeten- /Satellitenbewegung

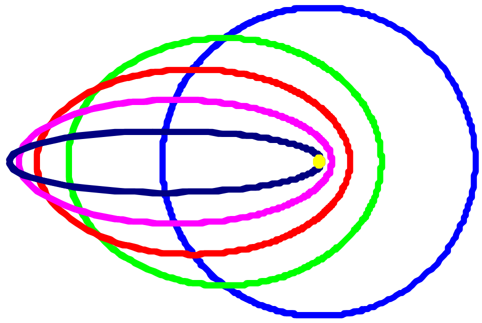
Bewegung eines Körpers (Planet, Mond, Satellit, …) mit Masse m im Gravitationsfeld eines „Zentralkörpers“ (im Ursprung des Koordinatensystems!) mit Masse M (Sonne, Erde …):

Bsp.: Versch. Kreis- u. Ellipsenbahnen

Dgl. $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad -\cancel{m} \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \cancel{m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$ [Gl.3.1.7.]

Lsg. dieser Dgl … **Kepler**sche Gesetze:

1. Bahnkurven $\vec{r}(t)$ sind Kegelschnitte – Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Der Zentralkörper steht <u>im Brennpunkt</u>!



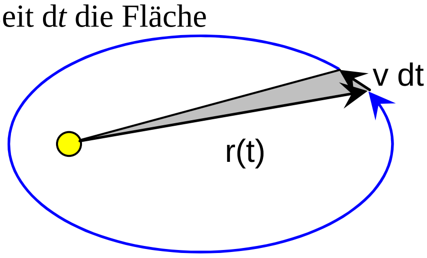
2. „Flächensatz“ (⇨ Drehimpulserhaltung) :
Verb.-Linie „Sonne-Erde“ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche !
Vebindungslinie Sonne-Planet überstreicht in Zeit d*t* die Fläche

$$\mathrm{d}A = \tfrac{1}{2}|\vec{r}(t)| \cdot |\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t| \cdot \sin\alpha$$

$$\mathrm{d}A = \tfrac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\frac{|\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)|}{m} = \tfrac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = const.!$$



[Gl.3.1.8.]

⇨ Überstr. Fläche pro Zeit („Flächengeschw.“) ist wg. Drehimpulserhaltung konstant!

3. Für alle (auf geschlossenen Bahnen, d.h. auf Kreis- oder Ellipsenbahnen) um einen Zentralkörper umlaufenden Satelliten gilt

$$\frac{R^3}{T^2} = const. \;! \qquad \text{[Gl.3.1.9.]}$$

Dabei ist *T* die Umlaufzeit und *R* der Radius (Kreis) bzw. die große Halbachse (Ellipse) der Bahn.

Anm. : Alle Bahnen in obiger Skizze (Bsp. …) haben die gleiche <u>große</u> Halbachse, also die gleiche Umlaufszeit!

Das 1. u. 3. Keplerschen Gesetzes folgen aus der <u>***1/r²*** -Abhängigkeit</u> der Kraft vom Abstand (Newtonsches Gravitationsgesetz). Die strenge Herleitung ist *„etwas umständlich“* und sei Ihnen erspart … .

Beschränkt man sich auf Kreisbahnen (Radius R !), so folgt das 3. Kepler-Gesetzes sofort aus der Gleichheit von Zentipetalkraft und Gravitationskraft:

$$F_{Grav.} = F_z$$

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\gamma \frac{M}{(2\pi)^2} = \frac{R^3}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = const.$$

3. Keplersche Gesetz

⇨ log-log-Darstellung Umlaufszeit vs. Bahnradius bzw. gr. Halbachse

⇨ Gerade mit Steigung ………

- Der Komet **Hale-Bopp** hat eine Umlaufszeit von ca. 2400 a . Wie groß ist die große Halbachse seiner Ellipsenbahn ?