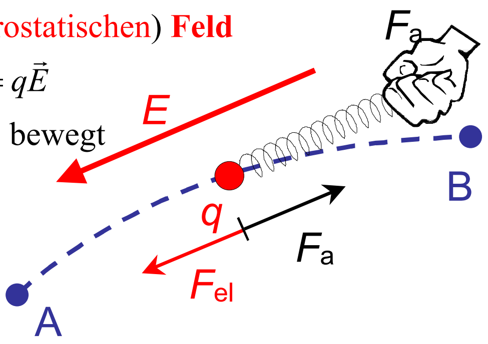
3.2.1.5 Elektrostatisches Potential

- Körper (**Ladung**) in (elektrostatischen) **Feld**
- Elektrostatische Kraft $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$
- Ladung wird von A nach B bewegt <u>gegen</u> $\vec{F}_{el}$,
  Kraft $\vec{F}_a$: $\vec{F}_a = -q\vec{E}$



- Arbeit: konst. Kraft $W = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = -\vec{F}_{el} \cdot \vec{s} = -qE \cdot s$
  veränderl. Kraft: $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_a \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$
  ⇨ *vergl. Kap. 1.3.2 (Arbeit, pot. Energie)*
- Elektro<u>**statisches**</u> Feld **keine Wirbel** ⇨ <u>**konservatives Feld!**</u>
- <u>**skalarer**</u> (Potential-) Wert $\varphi(x,y,z)$ an jedem Raumpunkt
  (Landkarte: Höhenlinien ➔ Potential , Steigung ➔ Kraft)
- Potential = pot. Energie / Ladung

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{1}{q} W_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  - Nullpunkt ($\varphi = 0$) kann beliebig gewählt werden
  - Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten: Spannung U

$$U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  - Äquipotentiallinien (-flächen) ⊥ auf E-Feld !
    $\varphi(x,y,z) = \text{const}.$
  - Potential: „Höhenliniendarstellung des E-Feldes“
  - $\vec{E}$-Feld (Vektor) ⇔ φ-Feld (Skalar)
    gleicher phys. Sachverhalt

Elektrostatisches Potential

$\vec{E}$-Feld

Integration: $\varphi = -\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Differentiation: $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots$

Potential φ

- $\varphi_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \varphi_A$
  - wähle Nullpunkt bei A
  - Integral unabhängig vom Weg (**konservatives Feld**)
    ⇨ *für Berechnung einfachen Weg wählen!*
- E-Feld = „Gefälle im Potential-Gebirge“
  - Richtung : steilster Abfall des Potentials
  - (negativer) <u>**Gradient**</u>

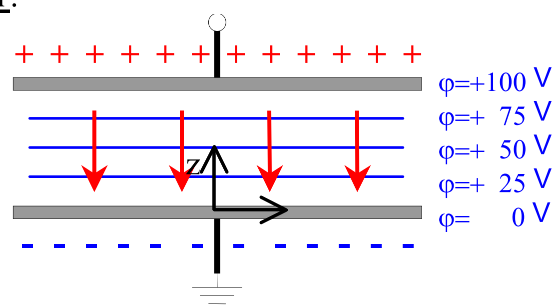
$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\\ E_y &= -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\\ E_z &= -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{E} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\end{pmatrix} = -\mathrm{grad}(\varphi) = -\vec{\nabla}\varphi$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, mit „**Nabla**-Operator“: $\vec{\nabla}\ldots = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ldots}{\partial x}\\ \frac{\partial\ldots}{\partial y}\\ \frac{\partial\ldots}{\partial z}\end{pmatrix}$

Elektrostatisches Potential

- **Plattenkondensator**:
  Abstd. D
  Spannung U

  $\varphi = 0$ bei $z = 0$
  $\varphi = U$ bei $z = D$

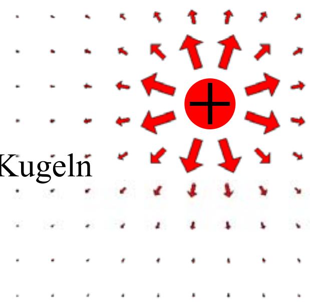


- Potential: $\varphi(x,y,z) = \frac{U}{D} z$

  Zahlenbsp.: $D = 4$ cm, $U = 100$ V ⇨ $\varphi = 25\ \text{V/cm} \cdot z$

- E-Feld: $\vec{E} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$ ⇨ $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{U}{D} \end{pmatrix}$

- **Punktladung**



- E-Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\vec{r}^2} \vec{e}_r$
- Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugeln
- Potential hängt nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

  wähle: $\varphi = 0$ bei $r = \infty$

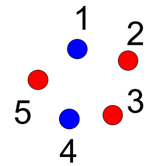
$$\varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{e}_r \,\mathrm{d}r = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \mathrm{d}r$$

$$\varphi(r) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

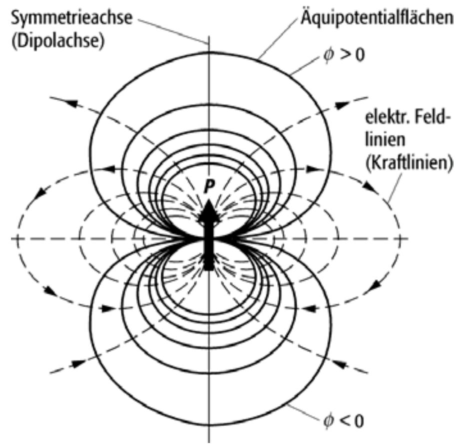
- Übung: Aus φ wieder das E-Feld berechnen !

Elektrostatisches Potential

- Für **Potential** gilt **Superpositionsprinzip** !
  - $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$
  - $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$
  - ☞ einfacher mit Potential (Skalar!) als mit E-Feld (Vektor!)



- Potential eines **Dipols:**
  Potential von
  zwei Punktladungen
  (+Q, -Q)
  an verschiedenen Positionen



- **Ladungsverteilung**:
- Potential eines inf. Vol.-Elements $\mathrm{d}V'$ bei $\vec{r}'$
  (Ladung $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r}')\mathrm{d}V'$) :

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}')\mathrm{d}V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Superpositionsprinzip: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{Vol.} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$