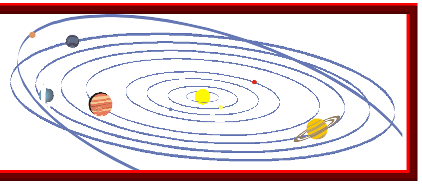
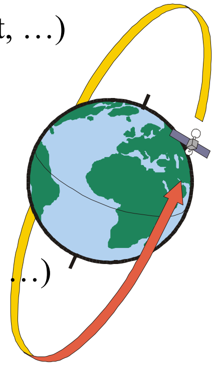
3.1.3 Planeten- u. Satellitenbahnen



- Wie bewegt sich Körper (Planet, Mond, Satellit, …) im **Gravitationsfeld** eines Zentralkörpers?



- DGl. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

  ⇘ $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -G \cdot \cancel{m} M \cdot \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3} = \cancel{m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$

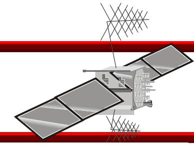
  M= Masse d. Zentralkörper (Sonne, Erde …)
- Lsg. dieser DGl. … **Keplersche Gesetze**
- **Newton** (*ca.*) 1684: $\frac{1}{r^2} - \text{Kraft} \overset{\text{Mathe.}}{\Leftrightarrow} \text{Kepler} - \text{Gesetze}$
- **Johannes Kepler** (1572-1630) aus Weil der Stadt, 1609/1619: Schlussfolgerungen aus astronomischen Beobachtungen (Tycho Brahe u.a.)

1. Keplersches Gesetz:
   Bahnkurven $\vec{r}(t)$ sind **Kegelschnitte**
   (Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel).
   Der Zentralkörper steht im Brennpunkt
2. Keplersches Gesetz:
   „Flächensatz“ (⇨ **Drehimpulserhaltung**)
   Verb.-Linie „Sonne-Erde“ überstreicht
   in gleichen Zeiten gleiche Fläche !
3. Keplersches Gesetz:
   Kreis- u. Ellipsenbahnen
   Umlaufszeit T hängt (nur!) von
   großer Halbachse a ab: $T^2 \sim a^3$!

Johannes Kepler
(1572-1630)

- **Walter Hohmann** (1880-1945), Ing. aus Hardheim, 1925: Berechnung der Flugbahnen mit min. Treibstoffverbrauch („Hohmann-Ellipsen“)

Keplersche Gesetze



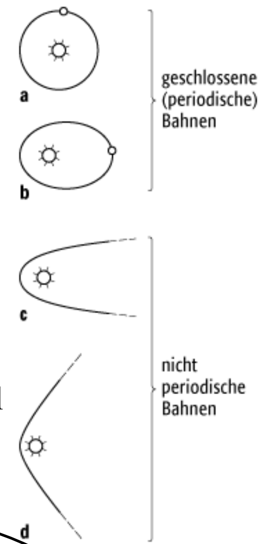
- Bahnen der Planeten/Satelliten sind **Kegelschnitte** (abhängig von den Anfangsbedingungen)

Kreis

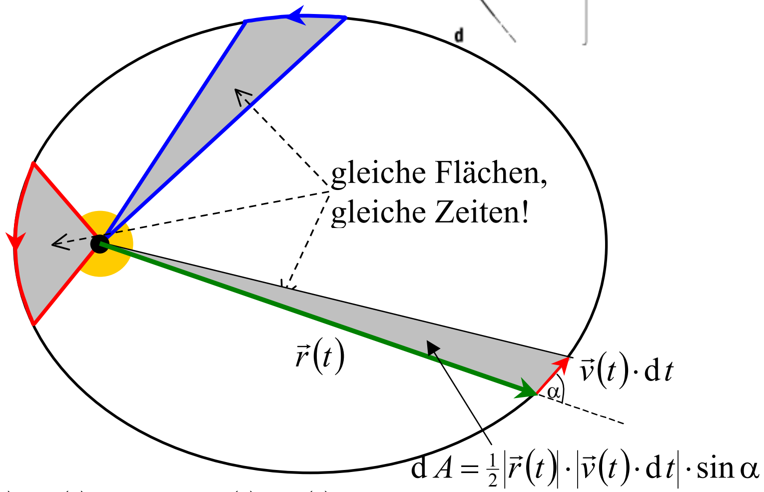
Ellipse

Parabel

Hyperbel



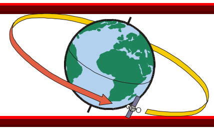
- Flächensatz⇔**Drehimpulserh.**



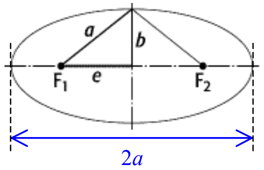
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}|\vec{r}(t)| \cdot |\vec{v}(t)| \cdot \sin\alpha = |\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)|$

  $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)|}{2m} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.}$
- Überstrichene Fläche pro Zeit („Flächengeschw.“) ist wg. Drehimpulserhaltung konstant!

Keplersche Gesetze

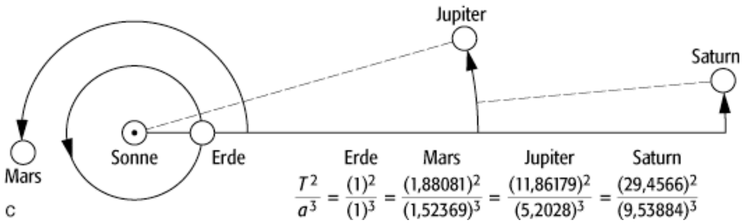


- Umlaufzeit T bei Kreis-/Ellipsenbahnen hängt (nur!) ab von großer Halbachse a
  (Kreis: Radius $R = a$!)



Für alle auf geschlossenen Bahnen (Kreis-/Ellipsenbahnen) um einen Zentralkörper umlaufenden Satelliten gilt :

$$T^2 \sim a^3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^3}{T^2} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \ldots$$



- 3. Kepler-Gesetz für **Kreis**bahn:
  Gravitationskraft = Zentipetalkraft !

$$F_{Grav.} = F_z$$

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R$$

$$G\frac{M}{R^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$G\frac{M}{(2\pi)^2} = \frac{R^3}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^3}{T^2} = \text{const.}$$