

Etwas Relativität^{stheorie}

2.3 Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

- **1864, Maxwell:**

vereinheitlichte Theorie der elektr. u. magn. Felder
(4 Maxwell-Gleichungen)

⇒ Elektromagn. Wellen,

$$\text{Geschw. } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m / s}$$

[Gl.2.3.1.]

☞ c steht fest ...

unabh. davon, ob sich Sender/Empfänger bewegen?

Widerspruch zu Galilei-Transf. ($c \pm v$)



- **1881 Michelson, Morley:**

Messung der Lichtgeschw.,

Ergebnis : c unabh. von Erdbewegung!

- **1890 Lorentz:**

elektromagnetisches Feld einer bewegten Ladung

Galilei-Transf. ⇒ Lorentz-Transf.

nur für em-Felder ? warum ?

- **1905 Einstein:** „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“

Maxwell-Gl. sind ok !

aber: unsere Vorstellungen von

Raum und Zeit

müssen radikal geändert werden!

Das Relativitätsprinzip

- In allen gleichförmig bewegten Systemen gelten durchweg die gleichen Naturgesetze.

spez.:

- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist für alle gleichförmig gegeneinander bewegten Systeme gleich groß.

Eidesstattliche Erklärung

Ich,, habe das Relativitätsprinzip zur Kenntnis genommen.

Ich anerkenne dieses Prinzip und gelobe es stets zu beachten.

Heilbronn, den

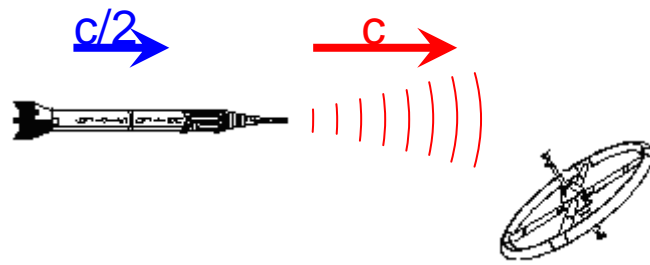
.....

Harmlos ?

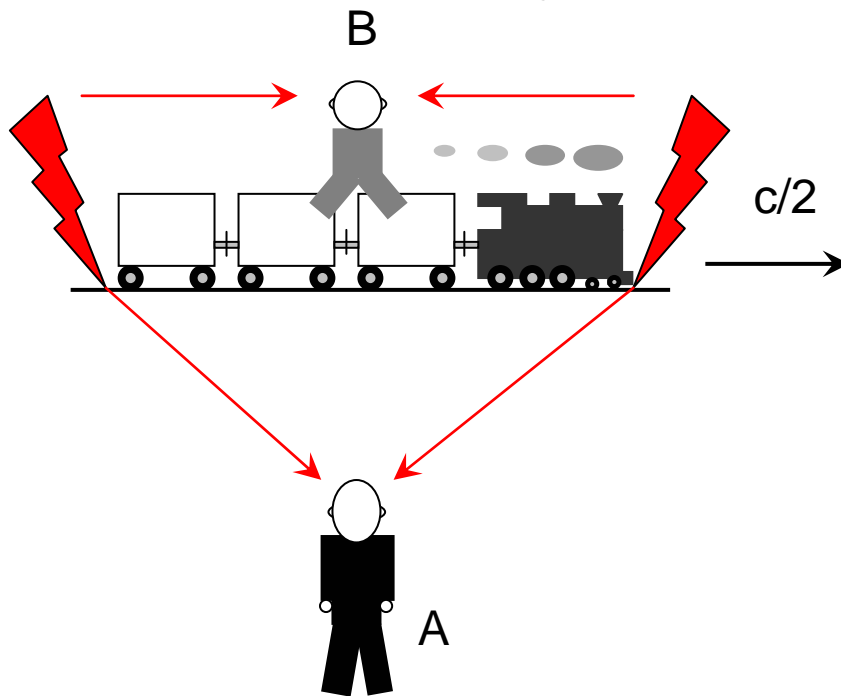
NEIN !

Relativitätsprinzip

- Rakete fliegt mit $c/2$
- Rakete sendet Radarwelle aus
- Radarwelle bewegt sich relativ zur Rakete mit c
- Radarwelle bewegt sich relativ zur Raumstation ebenfalls mit c !
(nicht : $c/2 + c$!)



2.3.1 Gleichzeitigkeit zweier „Ereignisse“



A:

- sieht beide Blitze gleichzeitig
- gleicher Weg
- gleiche Geschwindigkeit,
er/sie berücksichtigt die Laufzeit und kommt zum Ergebnis ...
- \Rightarrow die 2 Ereignisse „Blitzeinschlag vorne/hinten“ sind **gleichzeitig**

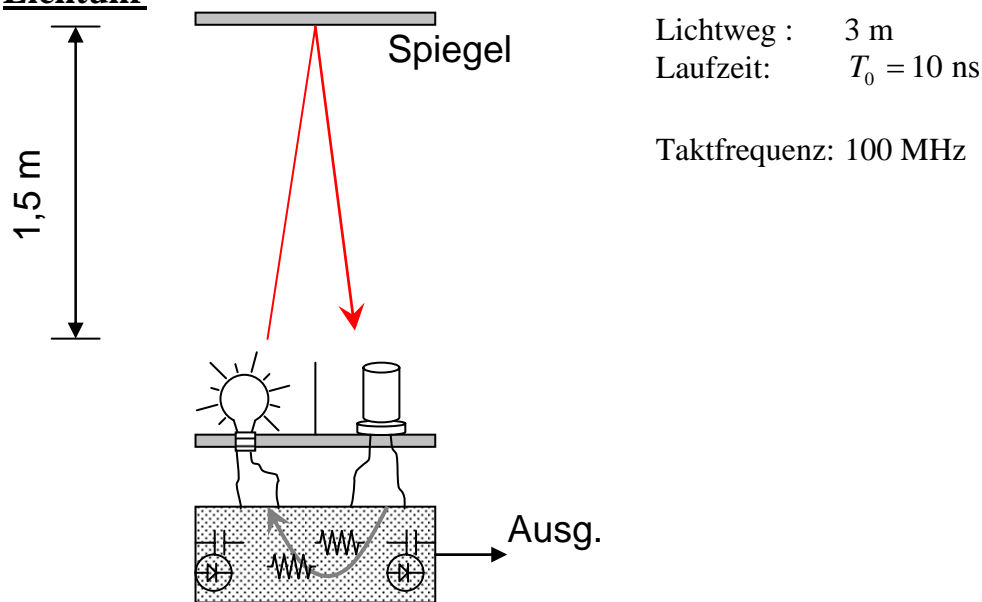
B:

- sieht vorderen Blitz zuerst! (warum ?)
- sitzt genau in der Mitte des Zuges
⇒ **gleicher Weg** für beide Lichtstrahlen !
- gleiche Geschwindigkeit! (c ist überall c !)
er/sie berücksichtigt die Laufzeit und kommt zum Ergebnis ...
- „Blitz vorne“ hat vor „Blitz hinten“ eingeschlagen, **nicht gleichzeitig!**

⇒ Zeit in den 2 Bezugssystemen ist nicht gleich!

2.3.2 Zeitdilatation

Lichtuhr



Wir lassen diese „Uhr“ mit einem Raumschiff mitfliegen ...
Anordnung : Lichtweg quer zur Flugrichtung

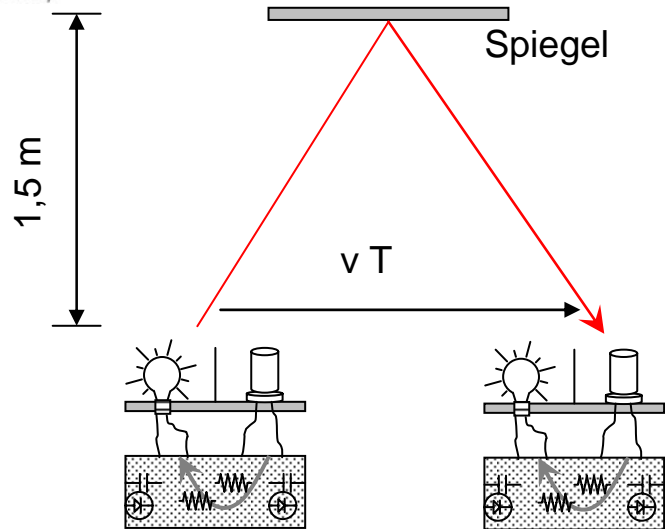
Mitbewegter Beobachter:

- Lichtweg : 3 m , Lichtgeschw. (wie immer!) $c = 30$ cm/ns, Laufzeit: $T_0 = 10$ ns
- Keine Änderung!
- Der mitbewegte Beobachter kann nicht feststellen, daß er sich bewegt!

Ruhender Beobachter:

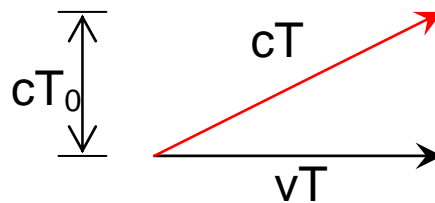
sieht Lichtuhr z.B. mit $c/2$
vorbeifliegen:
Spiegel und Detektor bewegen sich weiter, während Lichtimpuls läuft
⇒ Lichtweg : > 3 m

Lichtgeschw. (wie immer!) : c !
 Laufzeit: $T > 10$ ns
 Taktfrequenz: < 100 Mhz !



$$(cT)^2 = (vT)^2 + (cT_0)^2$$

$$T^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 T^2 = T_0^2$$



$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

[Gl.2.3.2.]

- bewegte (Licht-) Uhr geht langsamer!
- Relativitätsprinzip \Rightarrow **jede** bewegte Uhr geht langsamer!

Warum ? Beispiel:

Eine „Lichtuhr“ und ein Quarzuhr werden zusammen bewegt. Die zwei Uhren sollen für den mitbewegten Beobachter gleich schnell ticken. Wenn nun für den ruhenden Beobachter nur die Lichtuhr aber nicht die Quarzuhr durch die Zeitdilatation langsamer laufen würde, dann würde der ruhende Beobachter daraus entweder schließen, daß die Lichtgeschwindigkeit sich verändert hätte ... oder daß die phys. Gesetze, die die Quarz-Frequenz bestimmen, sich verändert hätten ... Beides wäre ein Widerspruch zum Relativitätsprinzip!

2.3.3 Lorentzkontraktion

Lichtuhr fliegt mit Geschw. v an ruhendem Stab vorbei ...

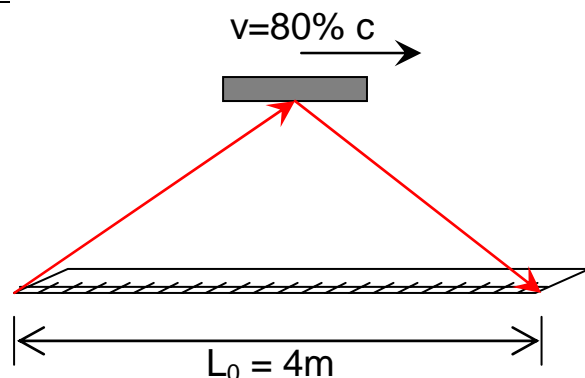
Bsp.: Länge des Stabs $L_0 = 4$ m ,

$T_0 = 10$ ns , $v = 0.8$ c

In der Zeit

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{10 \text{ ns}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3} \cdot 10 \text{ ns}$$

bewegt sich die Lichtuhr



$$\frac{4}{5} \cdot 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}} \cdot \frac{5}{3} \cdot 10 \text{ ns} = 4 \text{ m weiter}$$

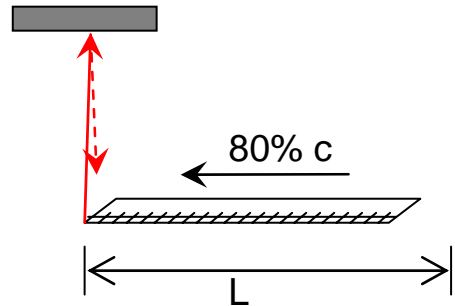
- **paßt** (gerade noch) durch! Lichtuhr wird nicht unterbrochen!

Wie „sieht“ der **mitbewegte Beobachter** diesen Vorgang ?

- Stab kommt mit 80 % c angeflogen
- Lichtuhr tickt mit $T_0 = 10 \text{ ns}$
- ein mitbewegter Beobachter bestimmt die Länge des (gerade noch durchpassenden) **bewegten** Stabes zu

$$L = vT_0 = \frac{4}{5} \cdot 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}} \cdot 10 \text{ ns} = 2.40 \text{ m} \rightarrow$$

„Kontraktion“



Lorentz-Kontraktion:

$$T_0 = T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$L = v \cdot T_0 = v \cdot T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

[Gl.2.3.3.]

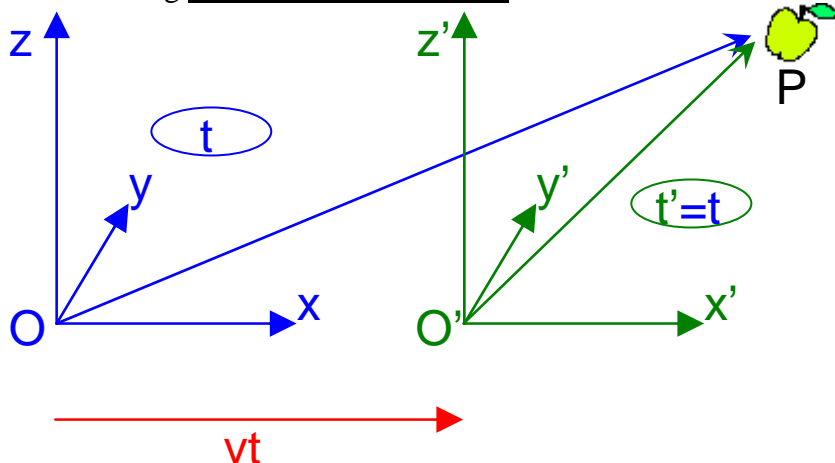
- Bewegter Körper ist verkürzt! *

* *genauer sollte man sagen* : „Messung der Länge eines bewegten Körpers ergibt kleineren Wert !“

2.4 Lorentztransformation

Gleichförmig **bewegte Bezugssysteme**

...bis einschl. 19. Jahrhundert



- $t = 0$, O' und O fallen zusammen
- O' bew. sich gegenüber O mit Geschw. V in $+x$ -Richtung

Galilei-Transformation

$$\begin{aligned}
 x' &= x - V \cdot t & v'_x &= v_x - V \\
 y' &= y & v'_y &= v_y \\
 z' &= z & v'_z &= v_z \\
 t' &= t
 \end{aligned}$$

[Gl.2.3.4.]

wenn aber...

- ... Licht sich **immer** mit c bewegt,
- ... gleichzeitige Ereignisse nicht mehr gleichzeitig sind,
- ... bewegte Uhren langsamer laufen,
- ... Maßstäbe ihre Länge ändern

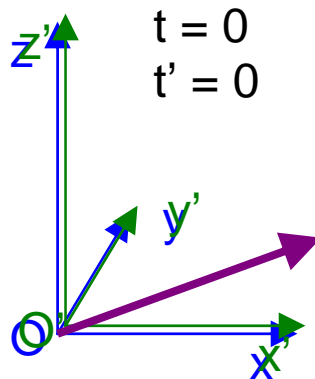
... dann müssen wir diese Formeln wohl etwas verbessern!

Galilei-Transformation gilt nur für

Lorentz-Transformation

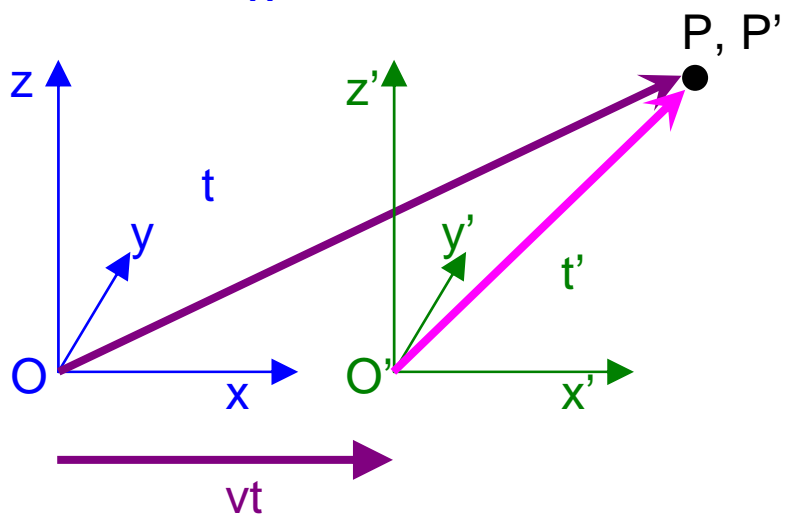
- Zwei Beobachter beobachten gleichen Vorgang in versch. Bezugssystemen S und S'.

- $t = 0, t' = 0$:
O' und O fallen zusammen,
bei O (= O') wird ein
Lichtsignal ausgesendet



- O' bewegt sich gegenüber O mit Geschw. V in $+x$ -Richtung

- O' und O beobachten das Ereignis P' (P)
 $P' = (x', y', z', ct')$
 $P = (x, y, z, ct)$



- Für beide Beobachter bewegt sich Licht mit Geschw. c von $(0,0,0)$ zum Punkt (x, y, z) bzw. (x', y', z') , Licht kommt zur Zeit t bzw. t' an:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (ct)^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (ct')^2 \end{aligned} \quad (***)$$

[Gl.2.3.5.]

- lineare Transformation: $(x, y, z, ct) \xrightarrow{L\text{-Transf.}} (x', y', z', ct')$
 $x' = \dots x + \dots t$ etc.
- c ist in beiden Systemen gleich!! $\Rightarrow (***)$ muß gelten!
- O' ($x' = 0$) bewegt sich für O mit Geschw. V
für $x' = 0 \Rightarrow x = Vt$, $x' = A(x - Vt)$
- y und z ändern sich nicht!

Ansatz:

$$\text{Abk.: } \beta = \frac{V}{c}$$

$$x' = A \cdot (x - \beta \cdot ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = B \cdot (ct - D \cdot x)$$

A, B, D : Konstanten, so zu bestimmen, daß (***) gilt!

Einheiten von A, B, D ???

...etwas Rechnung - **das schaffen Sie selbst!** ...

- (x', y', z', ct') aus Ansatz in (***) einsetzen
- Koeffizientenvergleich: wenn beide Gl. in (***) für beliebige (x, y, z, ct) gelten sollen, müssen bei $\dots x^2, \dots (ct)^2, \dots x \cdot (ct)$ etc. in beiden Gl. die gleichen Vorfaktoren stehen!
 \Rightarrow mehrere Bestimmungsgleichungen für A, B, D !

Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta x)$$

[Gl.2.3.6.]

$$\text{mit : } \beta = \frac{V}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Umkehrung: $(x', y', z', ct') \rightarrow (x, y, z, ct)$

... etwas Algebra (auch das ist zu schaffen!) ...

oder Austausch $x' \leftrightarrow x, y' \leftrightarrow y$ etc., $\beta \leftrightarrow -\beta$:

$$x = \gamma \cdot (x' + \beta \cdot ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \gamma \cdot (ct' + \beta x')$$

- Die „Rücktransformation“ ergibt sich entweder durch Inversion (etwas Algebra) der „Hintransformation“ oder aber (mit dem gleichen Ergebnis!) durch Verwendung der selben Formeln (schließlich muß das Relativitätsprinzip auch für die L-Transf. gelten !!!) mit negativer Geschwindigkeit.

Wie ergibt sich aus der L-Transformation a) die Zeitdilatation und b) die L-Kontraktion ?

a) Zeitdilatation

- Uhr ruht im System S
- Zeit zwischen zwei Ereignissen (2 „Ticks“ der Uhr) am gleichen Ort $x_1 = x_2$:

$$T_0 = t_2 - t_1$$

- im System S' ergibt sich dann ...

$$\begin{aligned} cT' &= c(t'_2 - t'_1) = \gamma \cdot (ct_2 - \beta x_2) - \gamma \cdot (ct_1 - \beta x_1) \\ &= \gamma \cdot (ct_2 - ct_1) = \gamma \cdot cT_0 \\ T' &= \gamma \cdot T_0 \end{aligned}$$

[Gl.2.3.7.]

a) Lorentzkontraktion

- Länge wird im System S (in dem der Stab ruht) bestimmt durch $L_0 = x_2 - x_1$, wobei es nicht darauf ankommt, zu welchen Zeiten t_2, t_1 die beiden Koordinaten gemessen werden.
- Im System S' bewegt sich der Stab und es ist wichtig, daß x'_2, x'_1 **gleichzeitig** bestimmt werden ($t'_2 = t'_1$): $L' = x'_2 - x'_1$.
- Wir gehen deshalb von den gleichzeitigen Ereignissen im System S' aus und verwenden die L-Rücktransformation um daraus x_2, x_1 zu berechnen ...
- $L_0 = x_2 - x_1$ ergibt sich dann zu ...

$$\begin{aligned} L_0 &= x_2 - x_1 = \gamma \cdot (x'_2 + \beta \cdot ct'_2) - \gamma \cdot (x'_1 + \beta \cdot ct'_1) \\ &= \gamma \cdot (x'_2 - x'_1) \\ &= \gamma \cdot L' \end{aligned}$$

$$\text{bzw.} \quad L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L_0 \quad , \quad L' = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot L_0$$

[Gl.2.3.8.]

2.5 Transformation der Geschwindigkeit

System S' bewegt sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung.

Mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ werden Raum-Zeit-Koordinaten gem. der L-Transf. umgerechnet:

$$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta x)$$

Wie werden Geschwindigkeiten zwischen S u. S' umgerechnet ?

Geschwindigkeit = Weg / Zeit \rightarrow **Weg** und **Zeit** müssen L-transformiert werden !

- Ein Körper bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} . \quad \text{Dabei ist} \quad u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\text{oder} \quad dx = u_x dt, dy = u_y dt, dz = u_z dt$$

- Mit der L-Transformation ergibt sich dann

$$\textcircled{1} \quad dx' = \gamma \cdot (dx - \beta \cdot c dt) = \gamma \cdot (u_x - \beta \cdot c) \cdot dt$$

$$\textcircled{2} \quad dy' = dy$$

$$\textcircled{3} \quad dz' = dz$$

$$\textcircled{4} \quad cd t' = \gamma \cdot (cdt - \beta dx) = \gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right) \cdot c dt$$

- Die Geschwindigkeitskomponenten $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ in S' erhält man, indem man Gl. ①, ② bzw. ③ durch Gl. ④ dividiert:

$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma \cdot (u_x - \beta \cdot c) \cdot dt}{\gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right) \cdot dt}$ $u'_x = \frac{u_x - \beta \cdot c}{1 - \beta \frac{u_x}{c}}$ $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$	$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right) \cdot dt}$ $u'_y = \frac{u_y}{\gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right)}$ $u'_y = u_y \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$	$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right) \cdot dt}$ $u'_z = \frac{u_z}{\gamma \cdot \left(1 - \beta \frac{u_x}{c}\right)}$ $u'_z = u_z \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$
---	---	---

- Die (richtige) relativistische Geschw.-Transformation unterscheidet sich also von der (nur für $v \ll c$ näherungsweise gültigen)

Galilei-Transformation ($u'_x = u_x - v$, $u'_y = u_y$, $u'_z = u_z$)

jeweils durch einen (von u_x und v abhängigen) Faktor, wobei die longitudinalen („x“) und transversalen Komponenten („y“ u. „z“) getrennt zu betrachten sind! Wichtiger Unterschied zur Galilei-T.: Auch die transversalen (y,z) Geschw.-Komponenten ändern sich! Warum? \Rightarrow Weil Uhren in den versch. Systemen verschieden schnell laufen und deshalb auch die Zeit transformiert werden muß!!!!

- Die relativistische Geschw.-Transformation ergibt („*automatisch*“), daß sich Licht in jedem System mit c bewegt: $|\vec{u}| = c \Rightarrow |\vec{u}'| = c$!

z.B. ergibt sich mit $u_x = +c$ für u'_x

nicht $c - v$ (Galilei-Transformation)

sondern $u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c$! [Gl.2.3.9.]

- Die relativistische Geschw.-Transformation ergibt stets Geschwindigkeiten (Betrag) $\leq c$!
Z.B. ergibt sich mit $u_x = +\frac{3}{4}c$ und $v = -\frac{3}{4}c$ für u'_x

nicht $\left(\frac{3}{4}c\right) - \left(-\frac{3}{4}c\right) = +\frac{3}{2}c$ (Galilei-Transformation)

sondern $u'_x = \frac{\frac{3}{4}c - \left(-\frac{3}{4}c\right)}{1 - \frac{\frac{3}{4}c \cdot \left(-\frac{3}{4}c\right)}{c^2}} = \frac{+\frac{3}{2}c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{25}c = \frac{24}{25}c < c$!

[Gl.2.3.10.]

2.6 Relativistische Dynamik

Impuls

In der nichtrelativistischen Dynamik war der Impuls eines Körpers der Masse m definiert als $\vec{p} = m\vec{v}$. Der Gesamtimpuls $\vec{p} = \sum m_j \vec{v}_j$ eines Systems aus miteinander wechselwirkenden Körpern (Bsp. Stoßgesetze) bleibt konstant: $\sum m_j \vec{v}_j = \sum m_j \vec{u}_j$. Da nach der Galilei-Transformation beim Wechsel des Bezugssystems bei allen Geschwindigkeitsvektoren die gleiche Konstante addiert wird ($\vec{v}_j = \vec{v}'_j + \vec{V}_s$, $\vec{u}_j = \vec{u}'_j + \vec{V}_s$), gilt: $\sum m_j \vec{v}'_j = \sum m_j \vec{u}'_j$

Ist der Gesamtimpuls in irgendeinem Bezugssystem S erhalten, so ist er auch in jedem anderen Bezugssystem S' erhalten!

Die relativistische Geschwindigkeits-Transformation (siehe Kap. 2.5) hat eine andere Struktur. Insbesondere werden bei relativistischer Transformation nicht nur die longitudinalen sondern auch die transversalen Geschwindigkeitskomponenten verändert. Würde man nun den Impuls nach wie vor als $\vec{p} = m\vec{v}$ definieren, so wäre - auch wenn im System S Impulserhaltung gilt - im System S' der Gesamtimpuls nicht erhalten. Um diesen Widerspruch zum Relativitätsprinzip zu vermeiden, muß der Impuls anders berechnet werden.

Mit der relativistischen Impuls-Definition

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \gamma \cdot \vec{v} \quad [\text{Gl.2.3.11.}]$$

m_0 ist die Masse des Körpers („Ruhemasse“). Der Index 0 wurde eingefügt, um Verwechslungen mit dem in manchen Büchern verwendeten Begriff „bewegte Masse“ $m(v)$ auszuschließen.

werden diese Widersprüche vermieden:

Ist der so definierte Impuls in S erhalten, so gilt dies auch in S' !

Die Rechnung ist „etwas umständlich“ und wird hier weggelassen ...

- Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten wird $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \approx 1$ und man erhält die nichtrelativistische Formel für den Impuls $\vec{p} = m_0 \vec{v}$.
- Für $v \rightarrow c$ wird γ beliebig groß. Damit wird auch der Impuls beliebig groß (selbst wenn die Geschwindigkeit auf Werte $< c$ begrenzt bleibt).
- Auch in der relativistischen Dynamik gilt das II. Newtonsche Gesetz $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Wirkt eine Kraft F so verändert sich der Impuls in der Zeit Δt immer um den gleichen Betrag, der Geschwindigkeitszuwachs wird allerdings immer kleiner.
- Ein Körper mit Masse kann nicht bis auf genau Lichtgeschwindigkeit (oder gar darüber) beschleunigt werden. Man kann sich aber (z.B. mit Elektronen) beliebig der Lichtgeschwindigkeit annähern (z.B. bei CERN $v = 0.999\,999\,999\,98\,c$, d.h. $v = c - 6\text{ mm/s}$).

Energie

Wird ein Körper durch eine Kraft F beschleunigt, so vergrößert sich nicht nur der Impuls, es wird auch Arbeit verrichtet und dadurch erhöht sich die **kinetische Energie**.

- Mit $F = \frac{dp}{dt}$ wird

$$dW = F ds = \frac{dp}{dt} ds = \frac{ds}{dt} dp = v dp$$

(vergleiche damit die nichtrelativistische Rechnung in Kap. 1.3.2.4 !)

- Um die Energie als Funktion der Geschwindigkeit zu berechnen müssen wir p als $p(v)$ (siehe oben) ausdrücken und dW so umformen, daß wir anschließend über v integrieren können ...

Mit $d(pv) = p dv + v dp$ wird

$$dW = v dp$$

$$= d(pv) - p dv$$

Integration ergibt dann die Beschleunigungsarbeit bzw. die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \int dW$$

$$= pv - \int p dv$$

Einsetzen von $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und Integration über v ergibt

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \left\{ -m_0 c^2 \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right] \right\}$$

$$= m_0 c^2 \cdot \left(\frac{\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

relativistische kinetische Energie : $E_{kin} = m_0 c^2 \cdot \gamma - m_0 c^2$

[Gl.2.3.12.]

- Für einen Körper in Ruhe (für $v = 0$) ist $\gamma = 1$ und $E_{kin} = 0$
- Für $v \rightarrow c$ wird die kin. Energie (wie der Impuls) beliebig groß!
- **nicht**relativistisch gilt (*bekanntlich* ?) $E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$. Für $v \ll c$ muß sich dies auch als Näherung aus der relativistischen Energieformel ergeben ...

$$E_{kin} = m_0 c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\approx m_0 c^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - 1 \right] \quad \left(\text{für } \varepsilon \ll 1 \text{ gilt: } (1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Für kleine Geschwindigkeiten liefern die relativistische und die nichtrelativistische Formel \approx das gleiche Ergebnis (*obwohl die Formeln auf ersten Blick ganz unterschiedlich*)

aussehen!)

(vergl. Diagramm und gnuplot-file E_relativ.plt)

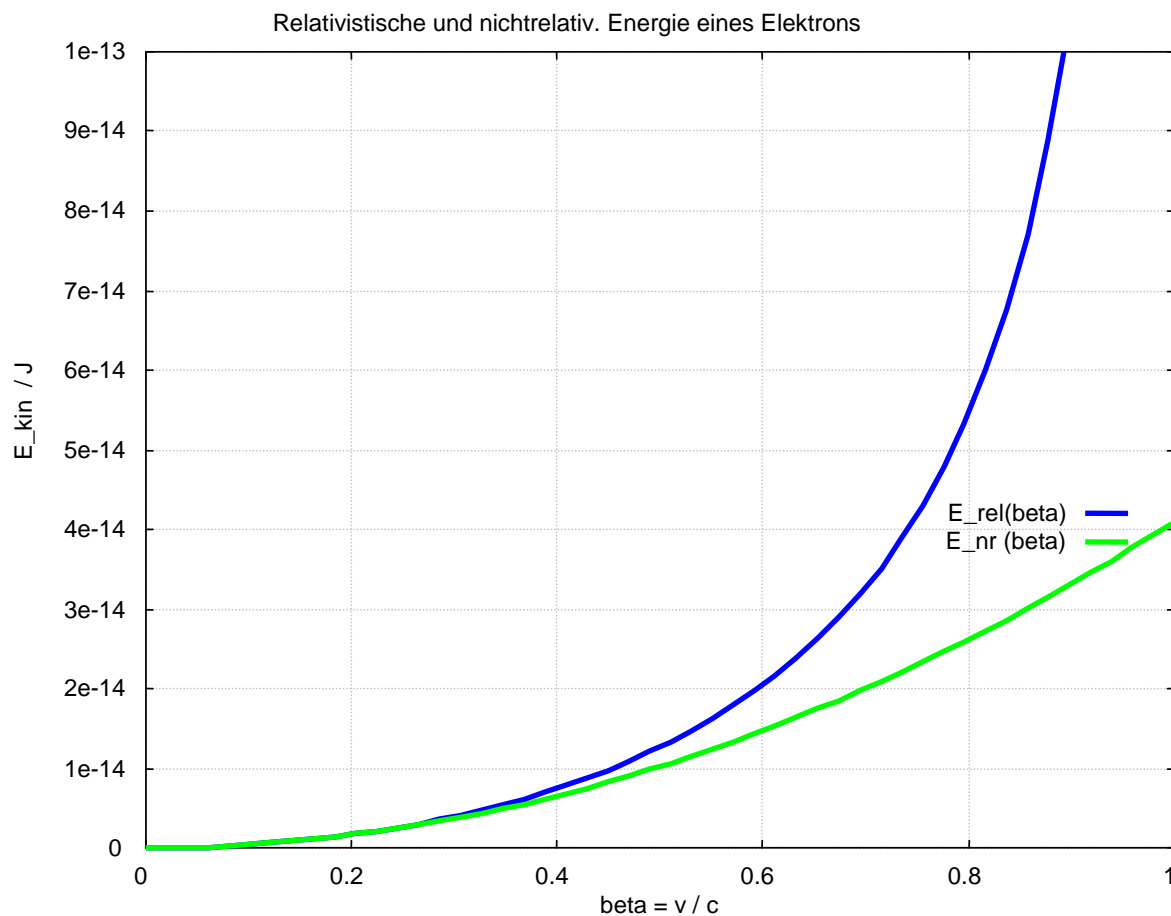
- Man bezeichnet $E_{Ruhe} = m_0 c^2$ als **Ruheenergie**,
die Summe aus kin. Energie + Ruheenergie als **Gesamtenergie** E_{tot}

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{kin} + m_0 c^2 \\ &= m_0 c^2 \cdot \gamma \end{aligned}$$

- Sowohl die Ruhemasse m_0 als auch die „bewegte Masse“ $m(v) = m_0 \cdot \gamma$ sind also mit einer Energie verknüpft und es gilt in beiden Fällen die Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalenz:

$$E = m \cdot c^2$$

[Gl.2.3.13.]



Energie-Impuls-Beziehung

Häufig ist es günstiger, die Energie als Funktion des Impulses (statt Geschwindigkeit)

auszudrücken. (Nichtrelativistisch gilt der Zusammenhang $E_{kin} = \frac{p^2}{2m_0}$)

Mit $E_{tot} = m_0 c^2 \cdot \gamma$ und $p = m_0 \cdot \gamma v \Rightarrow pc = m_0 c^2 \cdot \gamma \beta$ ergibt sich $pc = E_{tot} \cdot \beta$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = E_{tot}^2 \beta^2 + \frac{E_{tot}^2}{\gamma^2} = E_{tot}^2 \left(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) = E_{tot}^2$$

Oder ...

$$E_{tot} = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \quad [Gl.2.3.14.]$$

- Für $v \ll c$ ergibt sich daraus $\approx \frac{p^2}{2m_0} + m_0c^2$.
- Für „ultrarelativistische Teilchen“ mit $v \rightarrow c$ erhält man $E_{tot} \approx pc$
- Für masselose Teilchen (Photon, Neutrino, ...), die sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, ist $m_0 = 0$ und $E = pc$ bzw. $p = \frac{E}{c}$

Zusammenfassung

2.3 :

- **Zeitdilatation:** Bewegte Uhren gehen langsamer:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- **Lorentz-Kontraktion:**

Ein mit der Geschw. v bewegtes Objekt der Länge L_0 (gemessen in seinem Ruhesystem) erscheint in Längsrichtung verkürzt:

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

2.6 :

- relativistischer **Impuls** :

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \vec{v}$$

- relativistische **Energie**:

$$E_{tot} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0c^2 + E_{kin}$$

$$\approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \quad \text{für } v \ll c$$

- **Äquivalenz von Masse u. Energie** :

$$E = mc^2$$

- kein Energie-/Impuls-/Informations- Transport mit $v > c$!
- Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$$