1.5 Fluide: Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Wir haben im Kapitel „Mechanik“ bisher behandelt:

1) Massepunkte
2) Feste Körper (Starre Körper, elastische Körper siehe Vorl. techn. Mechanik!)

Feste Körper haben eine **bestimmte Form** und ein **bestimmtes Volumen**. Sie sind nur wenig komprimierbar und dehnen sich bei Erwärmung nur relativ wenig aus. Die Atome bzw. Moleküle sitzen an festen Plätzen und sind durch relativ große Kräfte aneinander gebunden.

Flüssigkeiten und Gase werden auch als „**Fluide**“ bezeichnet. Die **Flüssigkeiten** nehmen eine Mittelstellung zwischen festen Körpern und Gasen ein, sie haben ein **bestimmtes Volumen**, aber **keine feste Form**. Die Molekülbindungen sind schwach, so dass sich die Moleküle gegeneinander verschieben lassen. Die Moleküle einer Flüssigkeit zeigen höchstens in kleinen Bereichen eine räumliche Ordnung („Nahordnung“). Die Moleküle sind aber nicht wie in Festkörpern an feste Plätze gebunden, es gibt deshalb keine „Fernordnung“. Auf Grund der freien Beweglichkeit der Teilchen kann eine Flüssigkeit beliebige Formen annehmen und (unter der Einwirkung der Schwerkraft) eine ebene Oberfläche bilden.

Bei **Gasen** sind die einzelnen Moleküle (fast) frei beweglich, so dass sich ihre gegenseitige Anordnung dauernd verändert. Ein Gas hat deshalb **keine feste Gestalt** und kann ein **beliebig großes Volumen** einnehmen.

1.5.1 Ruhende Flüssigkeiten und Gase

1.5.1.1 Druck

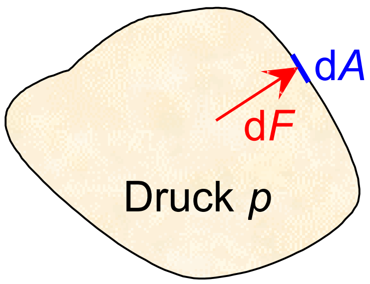
Auf ein Fluid kann nur eine (statische) Kraft ausgeübt werden, wenn sich das Fluid in einem Gefäß befindet. Die Wirkung der Kraft breitet sich über das ganze Volumen aus. Auf jede Begrenzungsfläche übt das Fluid senkrecht zum Flächenelement eine Kraft aus. Der Druck ist das Verhältnis von Kraft und Fläche (Flächennelement).

Kraft auf Flüssigkeiten und Gase

→

Auswirkung auf ganzes Volumen
Beschreibung durch Zustandsgröße:
☞ **DRUCK**

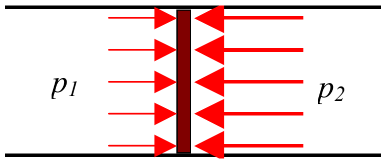
Kraft dF auf Flächenelement dA



$$\boxed{\text{DRUCK} \quad p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}} \qquad \text{[Gl. 1.5.1.]}$$

Druckeinheit: $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{Pa}$ (10^5 Pa $= 1$ bar , weitere „alte“ Einheiten sind immer noch gebräuchlich!)

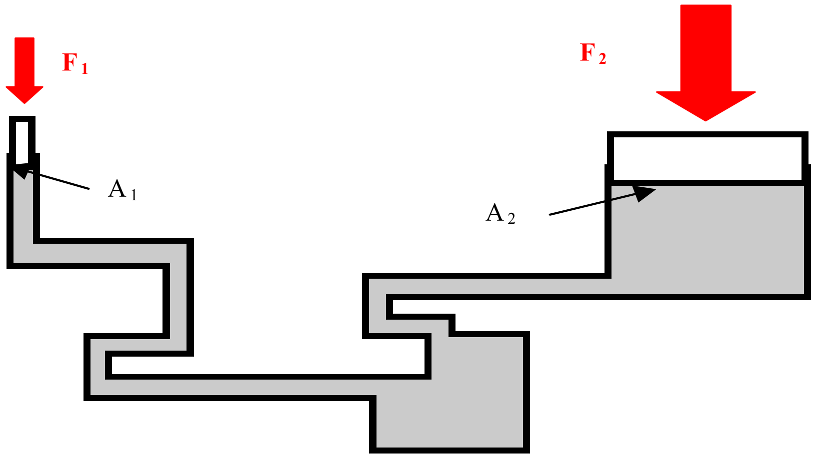
An Grenzflächen zwischen zwei Medien treten Druckkräfte <u>von beiden</u> Seiten auf !



☞ Die resultierende Kraft hängt dann von der <u>Druckdifferenz Δp</u> ab !

☞ *Um Missverständnisse zu vermeiden, sollte man mit p (i.d.R.) den „Absolutdruck" (Vakuum: p = 0) bezeichnen und für den „Über-" oder „Unter-" Druck die Druckdifferenz Δp verwenden.*

Der Druck wirkt nach allen Seiten (p ist **kein Vektor**!) und ist (bei ruhenden Fluiden) überall im System gleich groß, solange Höhenunterschiede (Schweredruck) vernachlässigt werden können.

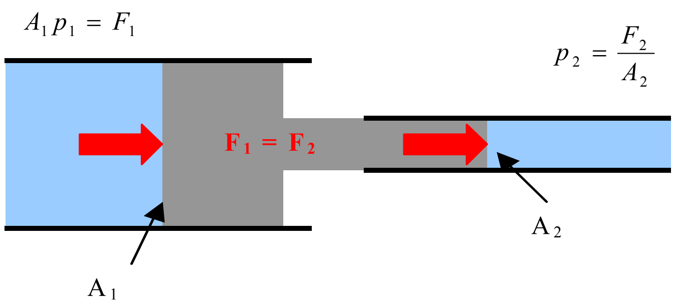


$$\boxed{p = \frac{F_1}{A_1}} \quad = \quad \boxed{p = \frac{F_2}{A_2}}$$

Dadurch wird es möglich, mit relativ geringem Aufwand sehr große Kräfte zu erzeugen (Hydraulik, Pneumatik). Z.B. kann mit einem kleinen Pumpenkolben einer (Hand-) Pumpe Druck „erzeugt" werden, der dann auf einen großen Kolben einer Presse oder eines Hydraulikhebers wirkt. Die dort wirkende Kraft ist proportional zur Fläche:

Hydraulischer Kraftwandler: $\boxed{F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1}$ [Gl. 1.5.2.]

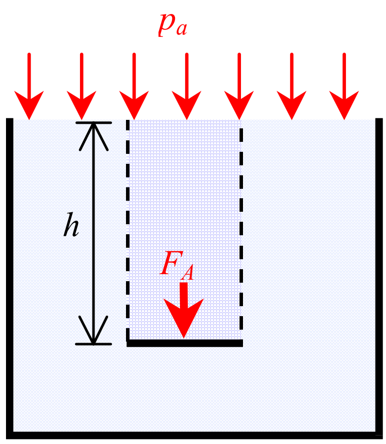
Wird umgekehrt mit einem großen Kolben eine große Kraft erzeugt und diese dann auf einen kleinen Kolben gegeben, so kann dort ein entsprechend großer Druck erzeugt werden:



Hydraulischer Druckwandler : $\boxed{p_2 = \frac{A_1}{A_2} p_1}$ [Gl. 1.5.3.]

1.5.1.2 Schweredruck (Flüssigkeiten)

An der Oberfläche einer Flüssigkeit herrsche der Druck p_a (z.B. Luftdruck). Auf eine Fläche A in der Tiefe h unter der Oberfläche wirkt dann außer der Druckkraft durch p_a auf die Oberfläche noch die Gewichtskraft der Wassersäule über der Fläche A.



- Gewichtskraft der Flüssigkeit erhöht den Druck

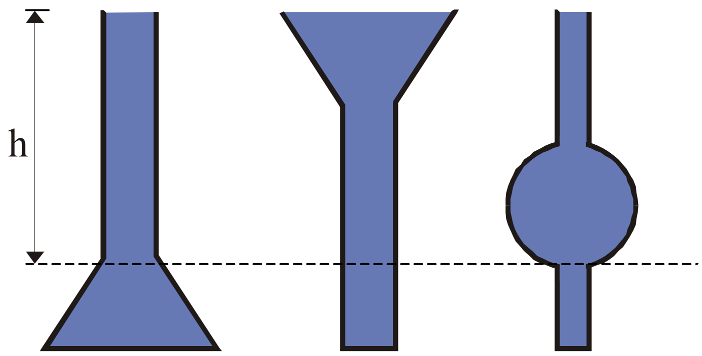
$$F_A = m \cdot g + p_a \cdot A = \rho(h \cdot A) \cdot g + p_a \cdot A$$

$$p = \frac{F_A}{A} = \rho \cdot g \cdot h + p_a$$

Hydrostatischer Druck in der Tiefe h $\quad p_{hydr.} = \rho \cdot g \cdot h + p_a$ [Gl. 1.5.4.]

(p_a = „äußerer Luftdruck“)

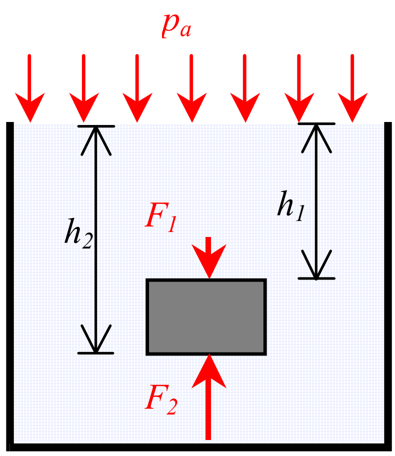
- der hydrostatische Druck ist **unabhängig** von der Form des Gefäßes!



$$p(h) = \rho \cdot g \cdot h + p_a$$

- **Auftrieb**

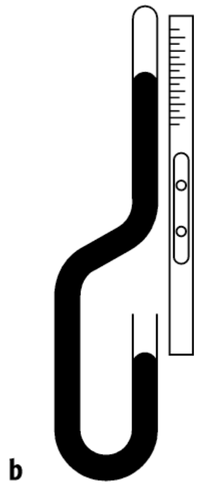
Auf Grund der **unterschiedlichen Druckkräfte** auf der Ober- und Unterseite (die Seitenkräfte heben sich weg!) eines in eine Flüssigkeit getauchten Körpers ergibt sich eine resultierende Kraft, die **Auftriebskraft**:



$$F_1 = p(h_1) \cdot A = (\rho_{Fl} \cdot g \cdot h_1 + p_a) \cdot A$$
$$F_2 = p(h_2) \cdot A = (\rho_{Fl} \cdot g \cdot h_2 + p_a) \cdot A$$

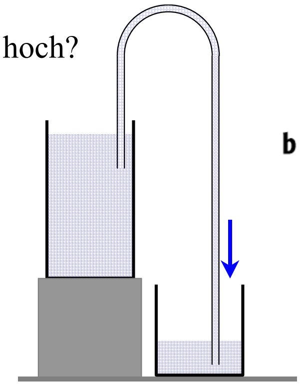
$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \underbrace{(h_2 - h_1) \cdot A}_{\text{Vol.}} \qquad \text{[Gl. 1.5.5.]}$$

- Archimedisches Prinzip: Die Auftriebskraft ist so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge: $F_A = \rho_{Fl.} g V$



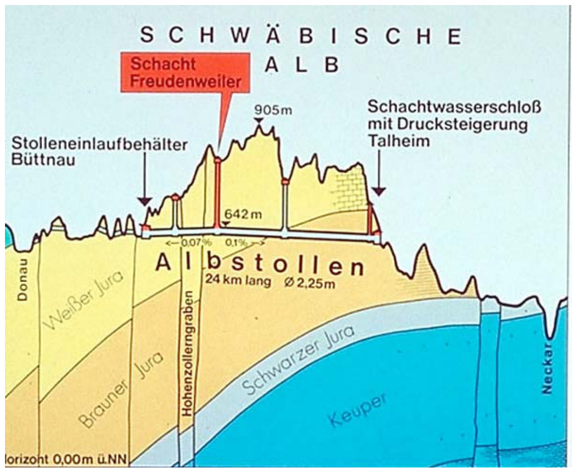
- Wann schwebt / schwimmt / sinkt ein Körper in einer Flüssigkeit?
- Gibt es auch eine Auftriebskraft, wenn ein Körper (Dichte $\rho < \rho_{Fl.}$) „dicht“ auf dem Grund aufliegt (d.h. <u>ohne</u> Flüssigkeitsschicht unter dem Körper) ?
  - ❑ ja   Warum ?
  - ❑ nein
- Flüssigkeitsbarometer (Quecksilberbarometer)
  Warum steigt eine Flüssigkeit in einem Rohr nicht beliebig hoch?
- Wie hoch kann eine Saugpumpe eine Flüssigkeit maximal fördern?
  ....
- Wie hoch darf der höchste Punkt eines Saug- oder Winkelhebers über dem Flüssigkeitsspiegel liegen? →

  ....



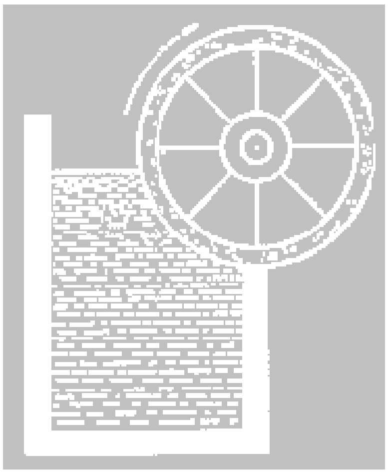
- Warum verlegt man Wasserleitungen <u>nicht</u> nach dem Prinzip des Winkelhebers über Berge?

  Bsp.: Bodenseewasserversorgung, Wasser fließt durch Tunnel unter der Schwäbischen Alb hindurch vom Bodensee (397 m über NN) Richtung Heilbronn (160 m über NN), also insgesamt <u>bergab</u>!



- Ein Mensch (m = 100 kg) steht auf eine Platte mit 1 m² Grundfläche. Unter der Platte ist ein „Wassersack“, der mit einem senkrechten Rohr verbunden ist. Wie hoch steigt die Wassersäule?
- <u>Seitendruck:</u> Welche Kraft, welches Drehmoment bewirkt der Flüssigkeitsdruck z.B. bei einer Staumauer ? Achtung: Druck ist abh. von Höhe, zunächst nur „dünnen Streifen“ betrachten, dann $\int \ldots \mathrm{d}h$!

Perpetuum mobile

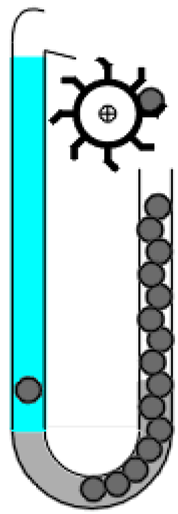


Es gibt immer wieder „geniale Erfinder", die mittels Auftrieb ein Perpetuum mobile bauen möchten …

Zwei einfache Beispiele:

1) Ein Holzrad wird einseitig in einen Flüssigkeitstank getaucht. Das Problem scheint nur noch eine möglichst gute Dichtung zu sein, so dass das Wasser nicht nachgefüllt werden muss.

Der einseitige Auftrieb bewirkt eine rechtsläufige Drehung des Rades – oder ???



2) In einem gewinkelten Rohr sind zwei Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte eingefüllt. Links z.B. Wasser, rechts Quecksilber. Die umlaufenden Kugeln sind so leicht, dass sie in beiden Flüssigkeiten schwimmen. Eine einzelne Kugel steigt im linken Teil des Rohres auf, fällt heraus und treibt eine Arbeitsmaschine an. Danach fällt sie in das rechte Teilstück des Rohres. Dort ist bereits eine größere Anzahl Kugeln versammelt, die durch ihr Gewicht die unterste Kugel so tief unter die Oberfläche drücken, dass sie in den linken Teil des Rohres rutscht, wo sie wieder aufsteigen kann – oder ???

1.5.1.3 Schweredruck in Gasen

Im Unterschied zu Flüssigkeiten ist die Dichte ρ eines Gases NICHT konstant, sondern hängt vom Druck ab! Bei konstanter Temperatur ist die Dichte proportional zum Druck: $\rho \sim p$. Aus der Proportionalität erhält man eine Gleichung, wenn man Druck p_0 und Dichte ρ_0 an einem Punkt, z.B. bei $h = 0$, kennt: $\rho(h) = \rho_0 \cdot \frac{p(h)}{p_0}$ z.B. ρ_0 : Dichte am Erdboden

p_0 : Druck am Erdboden

Da die Dichte jetzt nicht mehr konstant ist, können wir den Druckunterschied nicht mehr einfach als $\rho \cdot g \cdot h$ berechnen. Dies geht nur noch für eine dünne (bzw. infinitesimale) Schicht der Höhe Δh bzw. dh. Mit $\Delta p = -\rho\, g \cdot \Delta h$ erhält man für Luft ($\rho \approx 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$) bei $\Delta h = 1\ \mathrm{m}$ eine Druckabnahme von ca. 12 Pa; bei 100 m also 12 hPa oder ca. 1,2 % des normalen Luftdrucks.

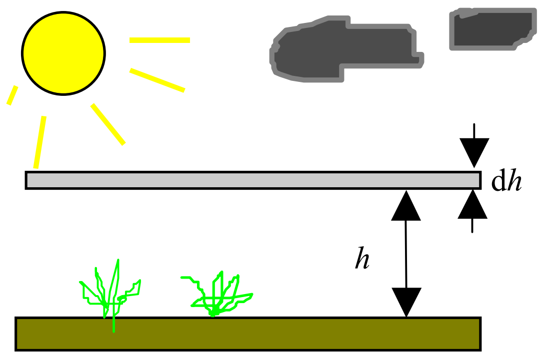
In einer infinitesimalen Schicht dh ergibt sich die Druckabnahme zu

$$\mathrm{d}\,p = -\rho(h)\,g \cdot \mathrm{d}\,h = -\,\rho_0\,\frac{p(h)}{p_0}\,g \cdot \mathrm{d}\,h$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0}\mathrm{d}h$$

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^h \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot \mathrm{d}h$$

⇨ $$\ln\frac{p(h)}{p_0} = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h$$



➤ **„Barometrische Höhenformel“** $$\boxed{p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}}$$ [Gl. 1.5.6.]

mit $\rho_0 = 1{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $p_0 = 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ ➩

Druck in 5,4 km Höhe ➔ 50 %
7,8 km Höhe ➔ 1/e … des Luftdrucks am Boden!

Mit der barometrischen Höhenformel, kann berechnet werden, wie Druck und Dichte in der Atmosphäre mit wachsender Höhe abnehmen. Allerdings wurde bei der Herleitung konstante Temperatur vorausgesetzt, was natürlich nicht wirklich stimmt. Die reale Druckabnahme wird deshalb leicht davon abweichen. Tatsächlich wird die Temperatur in großen Höhen ermittelt, indem man mittels Rückstreuung von Laserstrahlen zunächst die Dichte als Funktion der Höhe bestimmt und daraus (mit einem ähnlichen Ansatz wie oben) die Temperatur berechnet.

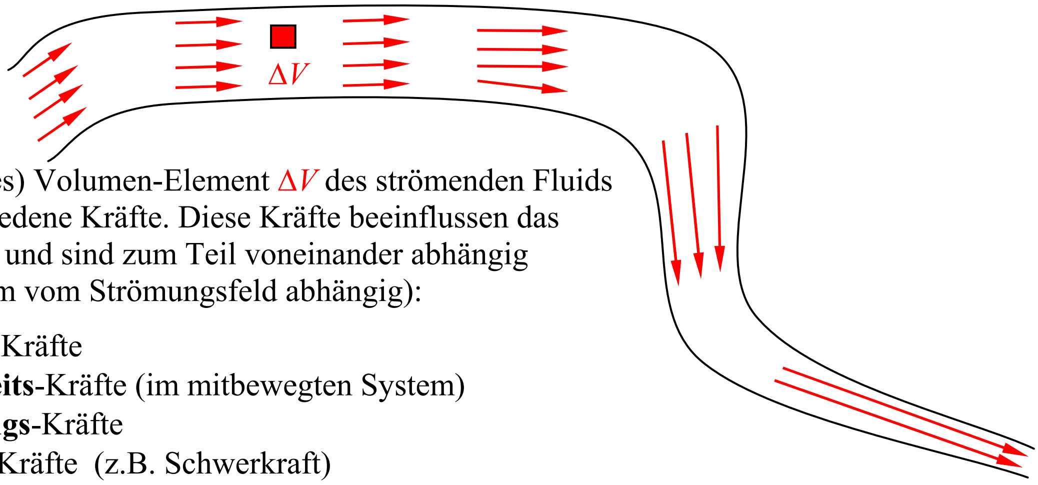
Wegen $p \sim \rho$ ist der Druck (bei konstanter Temperatur) proportional zur Anzahl der Atome/Moleküle pro Volumen. Die barometrische Höhenformel kann deshalb auch folgendermaßen interpretiert werden: Im thermodynamischen Gleichgewicht sind die Atome (*zum Glück!)* nicht alle im Zustand mit der niedrigsten (Lage-) Energie. Sie verteilen sich vielmehr auf verschiedene „Höhen“ (bzw. Energieniveaus, hier : Lageenergie) – und zwar genau so, wie dies die barometrische Höhenformel beschreibt! Wir werden darauf im Rahmen der **Thermodynamik** zurückkommen.

Zum Kapitel „ruhende Fluide“ gehören auch die Grenzflächeneffekte (Oberflächenspannung und Kapillarität). Wir müssen diese interessanten Phänomene hier (leider) auslassen. Schauen Sie einfach mal in Ihr Physikbuch!

1.5.2 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Räumliche Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(\vec{r})$

⇒ **Strömungsfeld**



Auf ein (kleines) Volumen-Element ΔV des strömenden Fluids wirken verschiedene Kräfte. Diese Kräfte beeinflussen das Strömungsfeld und sind zum Teil voneinander abhängig (bzw. wiederum vom Strömungsfeld abhängig):

- **Druck**-Kräfte
- **Trägheits**-Kräfte (im mitbewegten System)
- **Reibungs**-Kräfte
- äußere Kräfte (z.B. Schwerkraft)
- .... beeinflussen $\vec{v}(\vec{r})$!

In der Strömung hängen im allgemeinen Fall Geschwindigkeit, Druck, Dichte, Temperatur etc. von Ort $\vec{r}$ und Zeit t ab!

Die Berechnung von Strömungen und des Strömungsfeldes ist NICHT Thema der Physik-Grundlagenvorlesung. Diese Rechnungen sind meist reichlich kompliziert (⇨ Spezialvorlesung!), obwohl eigentlich „nur“ die Navier-Stokes-DGl.

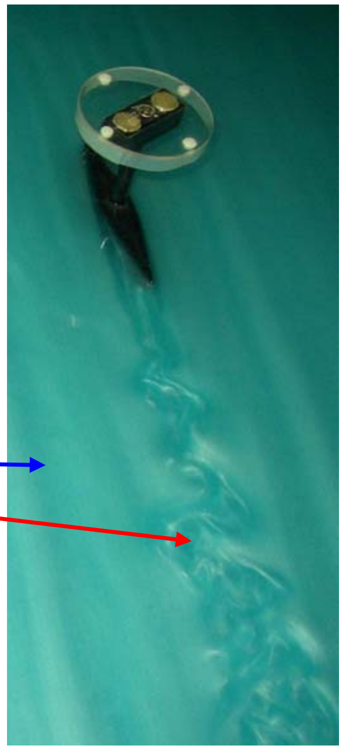
$$\rho\left\{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{v}\right\}=-\vec{\nabla}p+\eta\Delta\vec{v}$$ (hier: Spezialfall, inkompr. Flüssigkeit, ohne äußere Kräfte!) [Gl. 1.5.7.]

gelöst werden muss. Numerische Strömungsrechnungen werden oft auf den leistungsfähigsten Vektorrechnern durchgeführt … . Selbst auf Vektorrechnern (Cray) dauert dies u.U. Stunden. Ohne viel empirischen Input ist die Genauigkeit solcher Rechnungen oft eher bescheiden!

- ➢ Nicht ohne Grund werden immer noch Windkanäle gebaut!
- ➢ *Die Berechnung einer Strömung ist also ein recht komplexes Problem …* ☹
- ➢ *Wir werden in der Physikvorlesung in den ersten 2 Semestern deshalb zunächst nur die einfachsten Fälle behandeln:* ☺
- ➢ *Wir behandeln dabei verschiedene Effekte einzeln (die in Wirklichkeit alle gleichzeitig ablaufen!) und konzentrieren uns hauptsächlich auf einige* ***Spezialfälle****:*
  - stationäre Strömung (Strömungsfeld hängt nur vom Ort $\vec{r}$ aber nicht von der Zeit t ab)
  - laminare (geschichtete) Strömung: Turbulenzen, Wirbel werden (meist) nicht betrachtet
  - inkompressible Flüssigkeiten (oder bei Gasen: Dichteveränderung vernachlässigbar)
  - keine Senken und Quellen (Fluidmenge konstant)
- ➢ *Ein strömendes Fluid hat natürlich auch einen* ***Impuls*** *(und Drehimpuls!). Wird die Strömung z.B. ihrer Richtung abgelenkt, so ändert sich der Impuls, d.h. es wirken* ***Kräfte*** *(u. Drehmomente) auf die an- bzw. umströmten Körper. Auch dieses Kapitel müssen wir hier (leider) auslassen. Schauen Sie einfach mal in Ihr Physikbuch!*

Einige Zusatzbemerkungen zu laminaren und turbulenten Strömungen:

- Trägheitskräfte fachen Turbulenzen an,
  Reibungskräfte dämpfen sie.
  - Bei kleinen Geschwindigkeiten dominieren die viskosen Reibungskräfte. Die Strömung kann noch jeder Kontur folgen.
  - Bei größerer Geschwindigkeit kommt es zu großen Beschleunigungen. Wenn die Trägheitskräfte dominant werden, wird die Strömung turbulent.

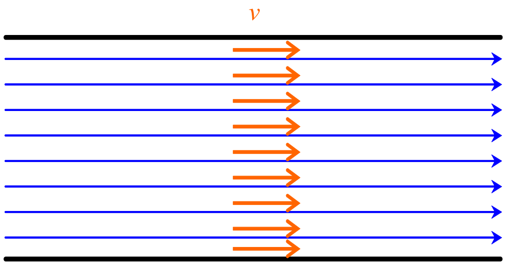


Laminare Strömung

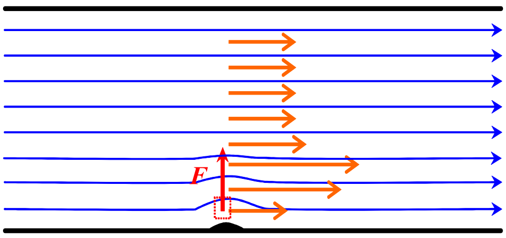
Wirbelbildung hinter Hindernis

Das Auftreten von Instabilitäten bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten kann man sich – stark vereinfacht – folgendermaßen erklären:

Ein Fluid durchströme ein Rohr zunächst laminar mit parallelen Stromlinien. Die Geschwindigkeit sei im Innern überall gleich groß, aber bereits im kritischen Bereich.



Auf Grund einer kleinen Störung (z.B. der stets vorhandenen Oberflächenrauhigkeit) werde eine Stromlinie etwas nach oben verbogen, die darüber liegenden Stromlinien werden also verengt und die Strömungsgeschwindigkeit wird dort größer. Durch den **Bernoulli-Effekt** (siehe Kap. 1.5.2.2) sinkt dann an dieser Stelle der Druck. Es ergibt sich eine **Kraft *F*** nach oben, die die Störung der Strömung weiter vergrößert. Ohne ausreichende Reibungskräfte schaukelt sich die Störung also auf, die Strömung wird **instabil** und schlägt schließlich in eine **turbulente Strömung** um.



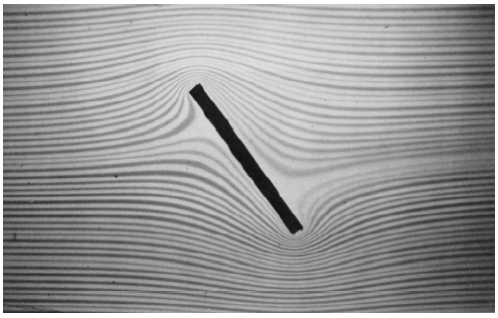
Ein strömendes Fluid wird durch die (dimensionslose!) **Reynolds-Zahl Re** beschrieben:

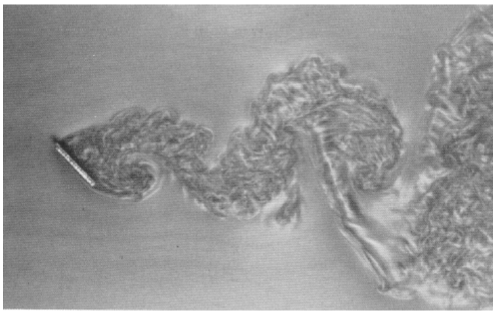
- $$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{vl\rho}{\eta}}$$ [Gl. 1.5.8.]

v: Geschwindigkeit, ρ: Dichte, η: Viskosität,
l: „charakteristische Länge" (typische Ausdehnung des Systems[1])

[1] Z.B. verwendet man bei Rohrströmungen als „charakteristische Länge" l den Rohrdurchmesser d.

Die Reynolds-Zahl ist ein Maß für das Verhältnis von Trägheitskräften zu viskosen Reibungskräften (Viskosität = Zähigkeit des Fluids, siehe Kap. 1.5.2.3). Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung passiert bei $\mathrm{Re}_{krit} \approx 2300$.





- $\mathrm{Re} < 2300 \Rightarrow$ laminar
- $\mathrm{Re} > 2300 \Rightarrow$ turbulent

Beispiel: Wasser, $\rho = 10^3$ kg/m³, $\eta = 10^{-3}$ Pa s, Rohrdurchmesser $d = 0{,}01$ m

a) $v = 1$ m/s Re = ……………….. ☐ laminar ☐ turbulent

b) $v = 0{,}1$ m/s Re = ……………….. ☐ laminar ☐ turbulent

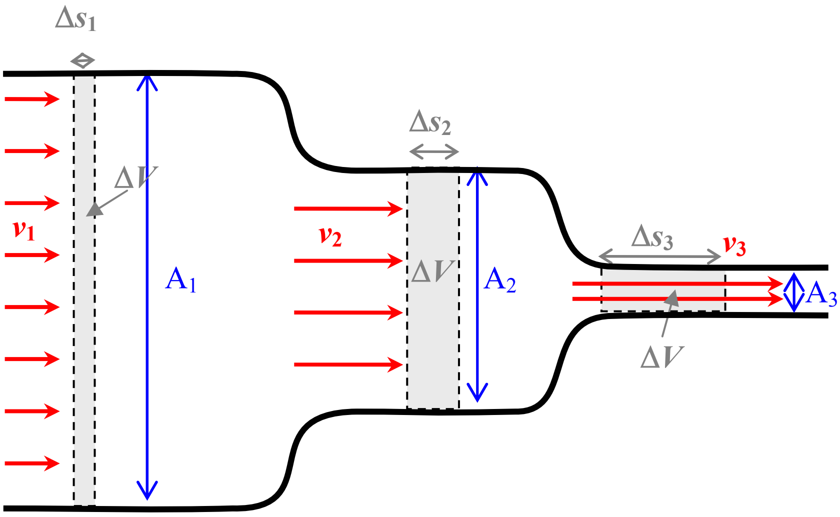
☞ Berechnen Sie nicht nur den Zahlenwert von Re, überprüfen Sie auch die Einheiten!

„**Mikrofluidik**“: In der Mikrosystemtechnik erlangen miniaturisierte Fluidbauelemente (Ventile, Pumpen, Düsen, Mischer, Wärmetauscher, Reaktionszellen für chem. Reaktionen etc.) immer größere Bedeutung. Solche Bauelemente werden in der chem. Analytik, Biotechnologie, Medizin etc. verwendet. Auf Grund der geringen Abmessungen sind die dabei auftretenden Reynolds-Zahlen bei solchen Mikrosystemen meist sehr klein. Die Strömungen sind dann also durch Reibungseffekte dominiert und deshalb laminar!

1.5.2.1 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten ein inkompressibles Fluid (Dichte konstant), das durch ein Rohr fließt, bei dem sich die Querschnittsfläche verändert.

Da die Dichte konstant ist, muss an jeder Stelle des Rohres in der Zeit Δt das gleiche Volumen ΔV vorbeifließen:



$$\Delta V = A_1 \cdot \Delta s_1 = A_2 \cdot \Delta s_2 = A_3 \cdot \Delta s_3 = \dots$$

Mit $\Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t,\quad \Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t,\quad \Delta s_3 = v_3 \cdot \Delta t,\quad \dots$ erhalten wir:

$$\Delta V = A_1 v_1 \cdot \Delta t = A_2 v_2 \cdot \Delta t = A_3 v_3 \cdot \Delta t = \dots$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 = \dots$$

⇨ „**Kontinuitätsgleichung**“ $$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dot{V} = Q = Av = \mathrm{const.!}}$$ [Gl. 1.5.9.]

Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass der „**Volumenstrom** $Q = \dot{V}$ (mit $[Q] = \mathrm{m^3/s}$) überall gleich groß ist und sich aus dem Produkt von Querschittsfläche und (mittlerer) Geschwindigkeit ergibt.

Analog gilt für den „**Massenstrom**“ $\dot{m}$ (mit $[\dot{m}] = \mathrm{kg/s}$) : $\boxed{\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho A v = \text{const.!}}$ [Gl. 1.5.10.]

1.5.2.2 Bernoulligleichung / Bernoullieffekt

Wie ändert sich der Druck p wenn sich die Geschwindigkeit v und der Querschnitt A ändern?

Spontane Antwort:

Bei kleinerem Querschnitt (größerer Geschwindigkeit) wird der Druck ☐ größer ☐ kleiner

Haben Sie „größer“ angekreuzt? Beachten Sie: Wir gehen von einem inkompressiblen Fluid aus. Dieses wird **nicht** etwa an der Engstelle auf ein kleineres Volumen zusammengedrückt (damit es dann mit konstanter Geschwindigkeit weiterfließen könnte). Das Fluid fließt vielmehr an der Engstelle mit größerer Geschwindigkeit, weil nur so pro Zeitintervall das gleiche Volumen hindurch kommt. Ein Volumenelement ΔV muss also beim Übergang von großem zum kleinen Querschnitt beschleunigt werden. Dazu ist eine Kraft erforderlich, die aus dem Druckunterschied stammen muss. Ein höherer Druck würde aber nicht beschleunigen sondern bremsen!

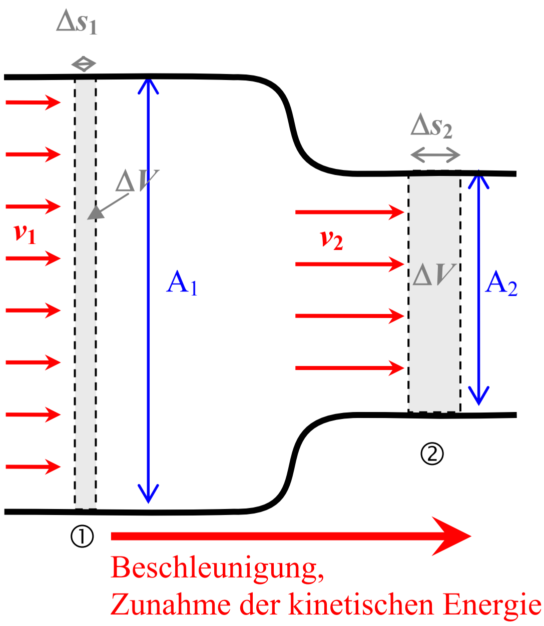
Zur Berechnung des Druckunterschieds verwenden wir die **Energieerhaltung**. Jede Fluidschicht „verrichtet Arbeit“, indem sie die vor ihr liegende Schicht „weiter schiebt“. Ohne Querschnitts- und Geschwindigkeitsveränderung gleicht sich Arbeits-Zufuhr (von hinten) und Arbeits-Abgabe (nach vorne) gerade aus.

Dies ändert sich, wenn wir zwei Punkte betrachten, an denen die Strömungsgeschwindigkeit verschieden ist. Die bei ① bzw. ② in der Zeit Δt verrichtete Arbeit ist:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta s_1 = (A_1 p_1) \cdot \Delta s_1 = p_1 \Delta V$$

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta s_2 = (A_2 p_2) \cdot \Delta s_2 = p_2 \Delta V$$

Wichtig: In beiden Fällen haben wir das gleiche ΔV (Kontinuitätsgleichung!)



Die Differenz $\Delta W = W_1 - W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$ wurde zur Erhöhung der kinetischen Energie gebraucht:

$$E_{kin_2} - E_{kin_1} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$ [Einheiten: J]

Mit dem **Energiesatz** erhalten wir somit:

$$(p_1 - p_2) \cdot \cancel{\Delta V} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \cancel{\Delta V} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$ [Einh.: J (nach Kürzen: J/m³)]

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$ [Einh.: $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{m^3}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{Pa}$]

Falls die Strömung auch Höhendifferenzen aufweist, dann muss zusätzlich noch die potentielle Energie (bzw. den Schweredruck $\rho g h$) berücksichtigt werden:

⇨ **„Bernoulligleichung“** $\boxed{p \quad + \quad \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2 \qquad (+\rho g h) \quad = \text{const}.!}$ [Gl. 1.5.11.]

Die Bernoulligleichung drückt nichts anderes aus als den **Energieerhaltungssatz für Strömungen**. Der Term $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$ ist die Dichte der kinetischen Energie (die auf das Volumen bezogene kin. Energie). Wir sehen an der Herleitung (und an den Einheiten!), dass auch der Druck als Energiedichte (mit $[p] = \text{Pa} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$) interpretiert werden kann.

Aus Kap. 1.5.1 kennen wir schon „den Druck“, den wir jetzt genauer als „statischen Druck“ bezeichnen. Er kann noch aufgeteilt werden in einen von außen aufgeprägten Druck („Betriebsdruck“) und den Teil, der aus dem Eigengewicht des Fluids resultiert („Schweredruck“). Nur bei strömenden Medien tritt der **„dynamische Druck“** oder **„Staudruck“** $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$ auf.

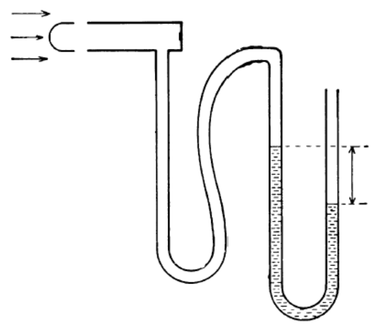
Bezeichnungen:

<table>
<tr><td>p</td><td>Betriebsdruck</td><td rowspan="2">$p+\rho g h$</td><td rowspan="2">statischer Druck</td><td rowspan="3">$p+\rho g h+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$</td><td rowspan="3">Gesamtdruck</td></tr>
<tr><td>$\rho g h$</td><td>Schweredruck</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$</td><td colspan="3">dynamischer Druck / Staudruck</td></tr>
</table>

<u>Druckmessung in Strömungen</u>

- **Drucksonde**

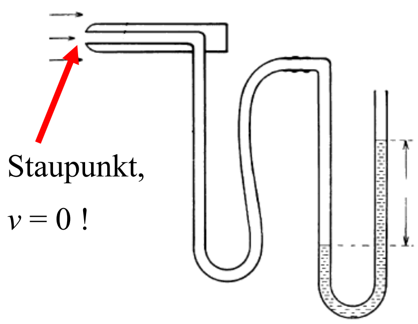
  Die Drucksonde hat seitliche Öffnungen (parallel zu den Stromlinien), sie misst den



- **statischen Druck**
- $\boxed{p} + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{ges}$

- **Pitot-Rohr**

  Das Pitot-Rohr hat eine zentrale Öffnung auf der Symmetrieachse. Es wird der Druck direkt vor dem Hohlrohr gemessen. Dort (am **„Staupunkt“**), ist die Strömungsgeschwindigkeit Null, so dass der Druck dort gleich dem Gesamtdruck in der Strömung ist!

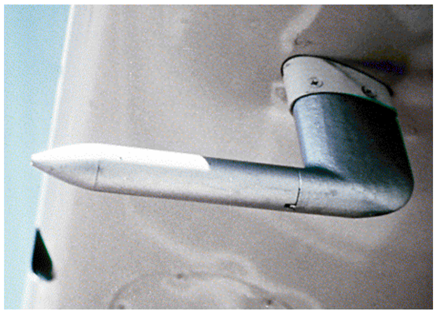


- **Gesamtdruck**
- $p + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = \boxed{p_{ges}}$

  Merke: Druck am Staupunkt ist der Gesamtdruck (<u>nicht</u> der Staudruck!)

- **Geschwindigkeitsmessung**

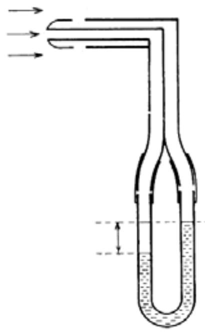
  Aus der Messung des Gesamtdrucks (Pitot-Rohr) und statischen Drucks (Drucksonde) kann der dynamische Druck und daraus die Geschwindigkeit berechnet werden. Beim Flugzeug wird z.B. der statische Druck für die Höhenbestimmung und der dynamische Druck für die Geschwindigkeits-bestimmung gebraucht.



- $\frac{1}{2}\rho\, v^2 = p_{ges} - p \quad \Rightarrow v\,!$

- **Prandtlsches Staurohr:**

  Das Prandtlsche Staurohr ist eine Kombination aus Drucksonde und Pitot-Rohr. Mit ihm kann direkt die Differenz zwischen Gesamtdruck und statischem Druck, also der dynamische Druck gemessen werden.



- **Dynamischer Druck**

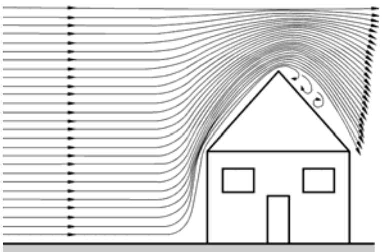
Die Bernoulli-Gleichung (Gl. 1.5.11.) besagt, dass die <u>Summe aus statischem und dynamischem Druck konstant</u> bleibt. Das bedeutet, dass in einer Strömung eine große Geschwindigkeit immer mit einem kleinen (statischen) Druck verbunden ist:

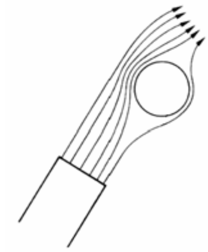
☞ **Große Geschwindigkeit** ⇨ **<u>kleiner Druck</u>!**

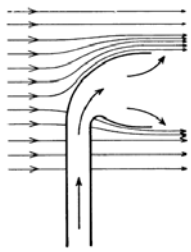
Die sich daraus ergebende „<u>Saugwirkung</u>“ von Strömungen heißt auch **Bernoulli-Effekt** (<u>Daniel</u> Bernoulli, 1700 – 1782).

- **Beispiele für den Bernoulli-Effekt**

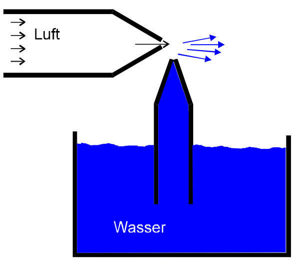
- Sturmschaden an Hausdach — Ball im Luftstrom — Schiffsentlüfter

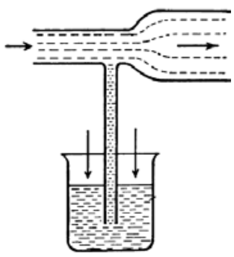


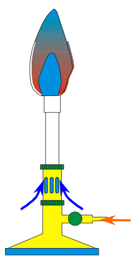




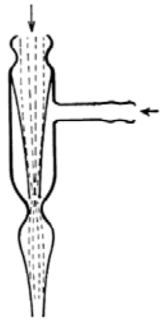
- Zerstäuber („*Airbrush*“), — Wasserpumpe — Bunsenbrenner







- Wasserstrahlpumpe



- Auftrieb bei **Flugzeug-Tragfläche**
(SEHR stark vereinfacht …)

a) Wirbelfreie Umströmung der Tragfläche

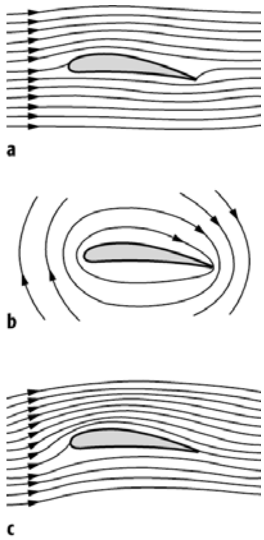
(erzeugt keinen Auftrieb!)

b) Durch das Ablösen des „Anfahrwirbels“

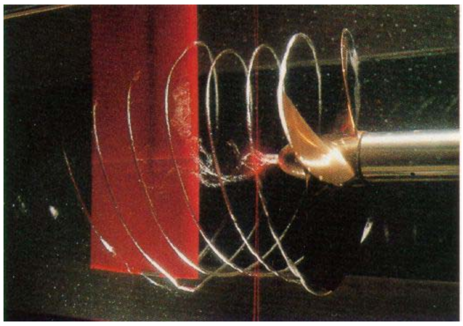
entsteht die „**Zirkulation**“ um die Tragfläche herum

c) Überlagerung mit a) ergibt eine Strömung mit …

- $v_{\text{Oberseite}} > v_{\text{Unterseite}}$
- Nach Bernoulli … $p_{\text{Oberseite}} < p_{\text{Unterseite}}$
und damit eine dynamische Auftriebskraft!

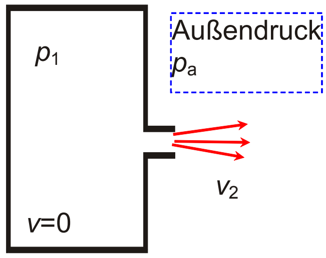


- **Kavitation:**
Bei großer Strömungsgeschwindigkeit kann auf Grund des Bernoulli-Effekts der Druck unter den (von der Temperatur abhängigen) Dampfdruck der Flüssigkeit sinken. Bei Wasser beträgt der Dampfdruck bei 20C 23 hPa. Wenn dieser Druck unterschritten wird, bilden sich in der Flüssigkeit Gasblasen.



Die Blasen sind instabil, sie implodieren mit großer Geschwindigkeit, was zur Zerstörung der Materialoberfläche führen kann!

- **Ausströmgeschwindigkeit:**



Aus einem Gefäß, in dem momentan der statische Druck p_1 herrscht, strömt (reibungsfrei!!!) ein Fluid aus. Im Außenraum sei der Druck gleich dem Luftdruck p_a

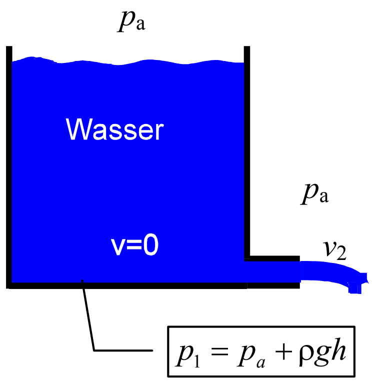
Bernoulli-Gl.: $p_1 + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2}}_{=0!} = p_a + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$

Ausströmgeschwindigkeit: $v_2 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (p_1 - p_a)}{\rho}}$ [Gl. 1.5.12.]

- **Torricellisches Ausflussgesetz**

Ist der Druck im Gefäß durch den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit (Höhe der Flüssigkeitssäule über der Öffnung: h) gegeben, so erhalten wir aus der Bernoulli-Gleichung:

$$p_a + \rho g h + 0 = p_a + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$



$\boxed{v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$ [Gl. 1.5.13.]

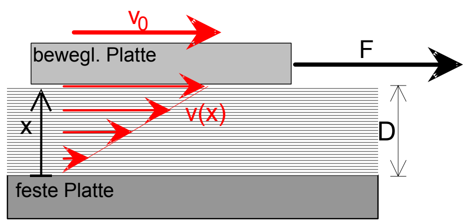
Die Ausflussgeschwindigkeit ist also gleich der Geschwindigkeit beim freien Fall aus Höhe h. Wir sehen daran wieder einmal, dass hinter der Bernoulli-Gleichung die Energieerhaltung steckt (Reibungseffekte wurden vernachlässigt!). Das gleiche Ergebnis erhalten wir (wie beim freien Fall) auch direkt aus dem Energieerhaltungssatz!

1.5.2.3 Viskosität

Innere Reibung bei Flüssigkeiten

Bei hinreichend kleinen Strömungsgeschwindigkeiten bewegt sich eine Flüssigkeit in Form einer „**laminaren Strömung**": Einzelne Schichten gleiten übereinander ohne sich zu vermischen. Zwischen zwei gegeneinander bewegten Platten stellt sich dann z.B. ein **Geschwindigkeitsgradient** oder **Schergefälle** $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ ein. Kräfte zwischen den Schichten bewirken eine von der Geschwindigkeit abhängige Reibungskraft.

Wir betrachten folgendes Modell:



Zwischen einer beweglichen und einer festen Platte befindet sich einen (dünne) Schicht einer zähen Flüssigkeit (z.B. Öl). Die einzelnen Flüssigkeitsschichten bewegen sich nun mit unterschiedlicher Geschwindigkeit $v = v(x)$. Direkt an den Plattenoberfläche ergibt sich jeweils die Geschwindigkeit der Platten, also $v(0) = 0$ und $v(D) = v_0$. Die Flüssigkeitsreibung bewirkt nun, dass zum Bewegen der Platte eine Kraft F erforderlich ist. Diese Kraft ist proportional zur Fläche A der Platte und in vielen Fällen auch proportional zum

Schergefälle $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$. Bei einer kleinen Schichtdicke D kann angenommen werden, dass die Geschwindigkeit $v(x)$ linear abfällt. Dann ist $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \approx \frac{v_0}{D}$.

Newtonsches Reibungsgesetz: $F_R \sim A \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

$$\boxed{F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}} \quad , \qquad [\eta] = \mathrm{Pa\ s} \qquad \text{[Gl. 1.5.14.]}$$

Die Proportionalitätskonstante η heißt **dynamische Viskosität** oder Koeffizient der inneren Reibung. Zwei Beispiele: Wasser, 20° , $\eta = 10^{-3}$ Pa s , Öl SAE 10, 55°, $\eta = 0{,}2$ Pa s .
Als **kinematische Viskosität** wird $\nu = \eta / \rho$ ($[\nu] = \mathrm{m^2/s}$) bezeichnet. Mit der **Schubspannung** $\tau = F_R / A$ ergibt sich das Newtonsches Reibungsgesetz zu

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad \text{[Gl. 1.5.15.]}$$

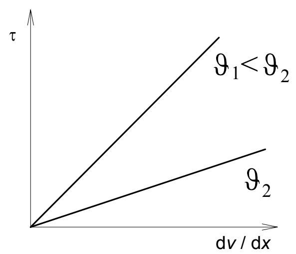
Die dynamische Viskosität η ist ein Materialwert, der temperatur- und druckabhängig ist. Die Temperaturabhängigkeit von η kann näherungsweise durch folgende Formel (vergl. Boltzmann-Faktor in der Thermodynamik!) beschrieben werden:

$$\eta(T) = A \cdot \mathrm{e}^{+\frac{\Delta E}{kT}} = A \cdot \mathrm{e}^{+\frac{B}{T}} \qquad k\text{: Boltzmann-Konstante.}$$

Die Konstanten A und B werden empirisch bestimmt (☞ Physikpraktikum!). $\Delta E = k \cdot B$ ist die „Aktivierungsenergie“, die benötigt wird, um die zwischenmolekularen Bindungskräfte aufzubrechen. A ist die Viskosität, die sich durch Extrapolation zu sehr hohen Temperaturen ergibt ($A = \lim_{T\to\infty} \eta(T)$) .

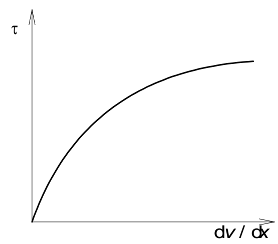
Eine Flüssigkeit, für die das Newtonsches Reibungsgesetz $\tau \sim \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ gilt, heißt „**Newtonsche Flüssigkeit**“. Bei vielen realen Flüssigkeiten findet man Abweichungen von der Proportionalität. Anders ausgedrückt: Die Viskosität ist bei „nichtnewtonschen“ Flüssigkeiten nicht konstant, sondern hängt vom Schergefälle ab, was dann z.B. an einer „**Fließkurve“ (**Darstellung der Schubspannung τ als Funktion des Schergefälles) zu erkennen ist.

Fließkurven: Schubspannung als Fkt. des Schergefälles bei konstanter Temperatur



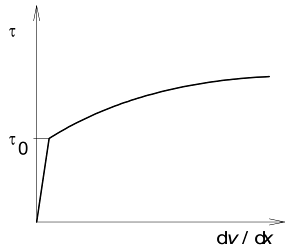
Reinviskose (Newtonsche) Flüssigkeit:

- linearer Zusammenhang (Steigung → Viskosität!)
- Viskosität **un**abhängig vom Schergefälle
- abhängig von der Temperatur ϑ !
- i.a. Flüssigkeiten mit kugelförmigen Molekülen



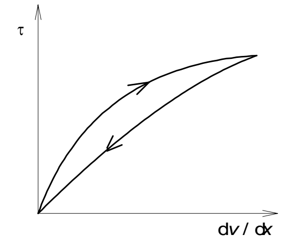
Strukturviskoses Verhalten

- bei großem Schergefälle zunehmende Ausrichtung der Moleküle parallel zur Gleitrichtung
- Viskosität nimmt ab
- Flüssigkeiten mit ellipsen- bzw. kettenförmigen Molekülen, in Lösungen von Hochpolymeren u. in Suspensionen.



Plastische Substanzen

- bei kleinen Schubspannungen elastisches Verhalten
- Gleiten beginnt, wenn „Fließgrenze τ_0 “, überschritten wird
- danach meist strukturviskoses Verhalten
- z.B. Schmierfette, Cremes und Pasten



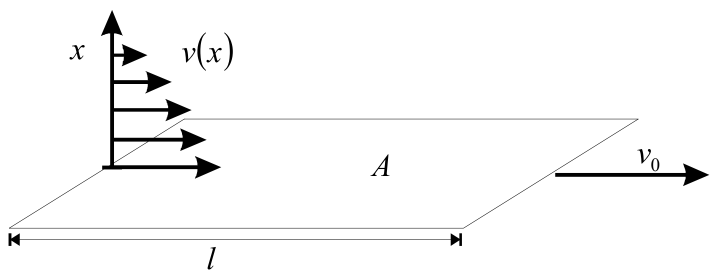
Thixotrope Substanzen

- Viskosität ist abhängig der von der Dauer der Scherbeanspruchung
- Viskosität nimmt mit der Dauer der Beanspruchung ab
- Hysterese in der Fließkurve!
- Nach Erholungszeit : wieder anfängliches Verhalten

Bei Strömungen die durch ein Rohr, einen Kanal o.ä. begrenzt werden, wird sich auf Grund der Reibungseffekte am Rand immer ein Schergefälle einstellen, d.h. dass die Strömungsgeschwindigkeit vom Abstand von der Wand abhängt. Bei engen Rohren wird sich dieser Randbereich über den ganzen Querschnitt erstrecken. Bevor wir das Geschwindigkeitsprofil einer solchen Rohrströmung berechnen, untersuchen wir die Frage, wie dick diese **Grenzschicht** an Wänden ist.

Grenzschichtdicke :
Bis zu welcher Entfernung beeinflusst eine Wand die Strömung?

Eine Strömung, die an einer festen Wand entlang fließt, wird in der Nähe der Wand durch Reibungseffekte gebremst. Direkt an der Oberfläche ist die Geschwindigkeit Null. Wir wollen die Dicke der Schicht **abschätzen**, in der die Strömung durch die Wand beeinflusst wird. Mit dieser Abschätzung kann dann entschieden werden, wann z.B. ein Rohr als „eng“ betrachtet werden kann.



Modell: Einzelne Platte bewegt sich durch ein ∞-großes Flüssigkeitsvolumen (alternativ: Flüssigkeit strömt an einer Platte entlang).

Wenn sich die Platte (Fläche A, Länge l) bewegt, dann hat die Flüssigkeit direkt an der Platte ebenfalls diese Geschwindigkeit: $v(0) = v_0$

Mit wachsendem Abstand wird die Geschwindigkeit absinken. Im Abstand D (*D = Dicke der Grenzschicht*) wird man nichts mehr von der durch die Flüssigkeit bewegten Platte merken: $v(D) = 0$. Näherung: Wir nehmen zur Abschätzung der Grenzschichtdick an, dass die Geschwindigkeit linear mit x abnimmt.

Der Geschwindigkeitsgradient (Schergefälle) ergibt sich somit zu $$\left|\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x}\right| = \frac{v_0}{D} ,$$

die Reibungskraft gem. dem Newtonschen Reibungsgesetz (Gl. 1.5.14.) zu $$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D} .$$

Um die Platte um eine Länge l weiterzubewegen, braucht man die Zeit in der Zeit $$t = \frac{l}{v_0}$$

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ($\Delta\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t$) ergibt sich daraus der Impulsübertrag auf die Flüssigkeit: $\vec{p} = \vec{F}_R \cdot t$

$$|\vec{p}| = \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D} \cdot \frac{l}{v_0} = \eta \cdot A \cdot \frac{l}{D} \qquad \text{[Gl. 1.5.16.]}$$

Das Flüssigkeitsvolumen $V = A \cdot D$ mit der Masse $m = \rho \cdot A \cdot D$ bewegt sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{v_0}{2}$ (wegen der angenommenen linearen Abnahme der Geschwindigkeit).

Die mitbewegte Flüssigkeit hat also den Impuls $|\vec{p}| = m\bar{v} = \rho \cdot A \cdot D \cdot \frac{v_0}{2}$ [Gl. 1.5.17.]

Durch Gleichsetzen von Gl. 1.5.16. und Gl. 1.5.17. erhalten wir die **Grenzschichtdicke**:

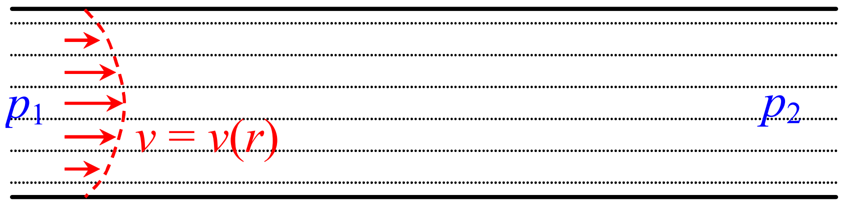
$$\eta \cdot A \cdot \frac{l}{D} = \rho \cdot A \cdot D \cdot \frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot l}{\rho \cdot v_0}}} \qquad \text{[Gl. 1.5.18.]}$$

☞ Was heißt also z.B. **eng** bei einem Rohr? Die Antwort ist Abhängig von der Länge!
Bsp.: Wasser, $\eta = 10^{-3}$ Ns/m² $v_0 = 1$ m/s $l = 1$ m ⇨ $D = 1{,}4$ mm

Strömung durch enges Rohr

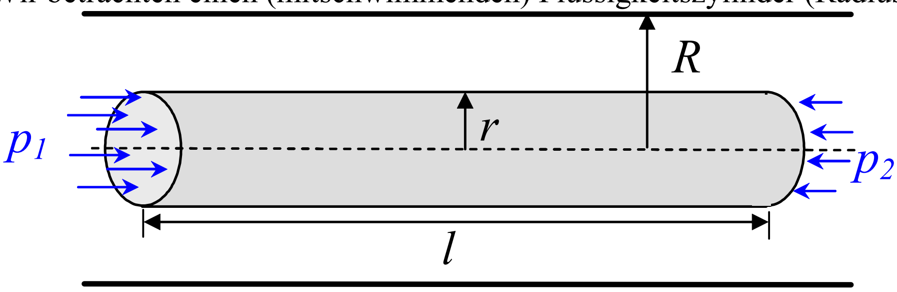
Wir betrachten nun eine Strömung durch ein enges Rohr. „Eng" soll heißen, dass der Rohrradius R kleiner oder höchstens ungefähr so groß wie die oben berechnete Grenzschichtdicke D ist: $R < D$, $R \approx D$.

- Im Rohr ergibt sich dann ein Geschwindigkeits-„Profil" $v(r)$, d.h. die Geschwindigkeit wird abhängig von r !
  In der Rohrmitte ist v maximal, am Rand ($r=R$) ist $v = 0$.



- Zur Überwindung der inneren Reibung ist eine (Druck-) Kraft erforderlich, d.h. dass in Längsrichtung der Druck abfallen muss: $p_1 > p_2$

Wir betrachten einen (mitschwimmenden) Flüssigkeitszylinder (Radius r):



Mit dem Newtonschen Reibungsgesetz (Gl. 1.5.14.) ergibt sich die Reibungskraft zu

$$F_R = -\eta \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \quad , \quad (\text{„-" wg. } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0!)$$

Dabei ist A die Fläche des Zylindermantels (dort tritt die Reibung auf!).

Somit gilt für die Reibungskraft:

$$F_R = -\eta \cdot (2\pi \cdot r \cdot l) \cdot \frac{dv}{dr} \qquad \text{[Gl. 1.5.19.]}$$

Die Druckkräfte links/rechts sind verschieden groß, sie wirken auf die Grundflächen des Zylinders:

$$F_p = \pi \cdot r^2 \cdot (p_1 - p_2) \qquad \text{[Gl. 1.5.20.]}$$

Da die Druckkraft Gl. 1.5.20. die Reibung Gl. 1.5.19. überwinden muss, erhalten wir aus $F_R = F_p$

$$\pi \cdot r^2 \cdot (p_1 - p_2) = -\eta \cdot (2\pi \cdot r \cdot l) \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot (p_1 - p_2)}{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{r} \cdot \eta \cdot l} = -\frac{r \cdot (p_1 - p_2)}{2 \cdot \eta \cdot l}$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$:

$$v(r) = \int -\frac{(p_1 - p_2)}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot r\, dr\ , \qquad v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot \int -r\, dr$$

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(-r^2 + C\right)$$

Das Geschwindigkeitsprofil hat also die Form einer **Parabel**. Wir müssen nun noch die Integrationskonstante C bestimmen. Aus der Bedingung, dass am Rand, d.h. beim Rohrradius R die Geschwindigkeit Null wird ($v(R) = 0$) ergibt sich $C = R^2$.

- Geschwindigkeitsprofil bei reibungsbehafteter Strömung durch enges Rohr:

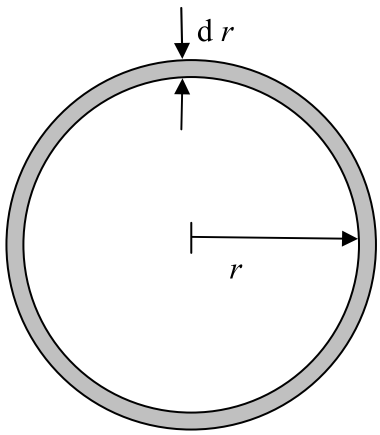
$$\boxed{v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(R^2 - r^2\right)} \qquad \text{[Gl. 1.5.21.]}$$

Die größte Geschwindigkeit ergibt sich in der Rohrmitte (bei $r = 0$): $v(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot R^2$

Strömung durch enges Rohr - Volumenstrom

Wie viel Flüssigkeit strömt nun insgesamt pro Sekunde durch das Rohr? Da die Geschwindigkeit r-abhängig ist, können wir den **Volumenstrom** $Q = \dot{V} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$ $\left([Q] = \text{m}^3/\text{s}\right)$ nicht einfach mit $Q = A \cdot v$ berechnen.

Für den (infinitesimalen) Volumenstrom durch einem dünnen Kreisring (Radius r, Wandstärke dr ist aber $dQ = v(r) \cdot dA$, $\qquad dQ = v(r) \cdot 2\pi r\, dr$.



Mit Gl. 1.5.21. erhält man

$$dQ = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot 2\pi r\, dr$$

Durch Integration bis zum Rohrradius R ergibt sich daraus der gesamte Volumenstrom Q:

$$Q = \int dQ$$

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot \pi \cdot \int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot \pi \cdot \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

- Volumenstrom durch ein enges Rohr:

Hagen - Poiseuillesches Gesetz $$\boxed{\dot{V} = \frac{(p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \pi \cdot R^4}$$ [Gl. 1.5.22.]

Um einen möglicht großen Volumendurchsatz zu erhalten, müssen wir beachten, in welcher Weise $\dot{V}$ von der Druckdifferenz, der Viskosität, der Rohrlänge und vom Rohrradius abhängt:

$\dot{V}$ $\sim \Delta p$ ⇨ hoher Druck !

$\sim 1/\eta$ ⇨ dünnflüssiges Fluid !

$\sim 1/l$ ⇨ kurzes Rohr!

Besonders stark beeinflusst allerdings der Radius (bzw. Durchmesser) das Ergebnis:

$\dot{V}$ $\sim R^4$ ⇨ **d i c k e s** Rohr **!!!!**

Wird der Radius z.B. verdoppelt, so erhöht sich der Volumenstrom wegen $\dot{V} \sim R^4$ um den Faktor **16**!