

## 1.4 STARRE KÖRPER

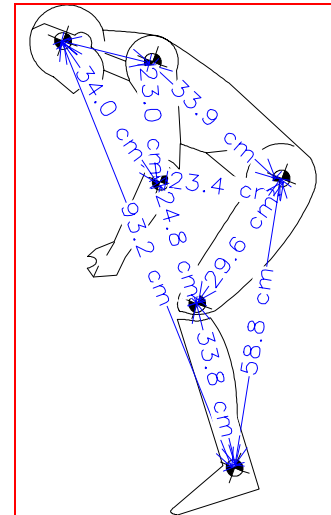
Bisher :

- ◆ Mechanik des Massepunkts, Ausdehnung der einzelnen Körper vernachlässigt
- ◆ „Systeme“ von mehreren punktf. Körpern:
  - Kräfte wirken auf einzelne Massepunkte,
  - diese bewegen sich unabh. voneinander gem. Newton-Gesetzen!
  - Abstände ändern sich ...

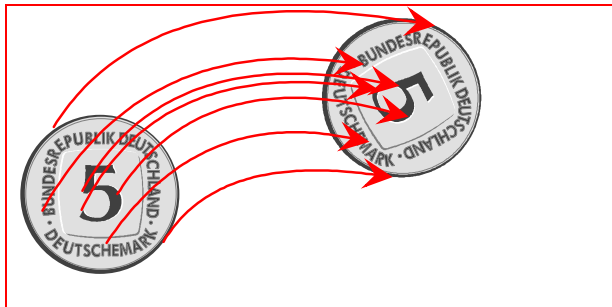
Modell: **Starrer Körper**

(Idealisierung, in Realität sind alle Körper mehr oder weniger leicht verformbar!)

- ◆ **Abstände** zwischen Teilen sind **fest**, damit :  
Form konstant!
- ◆ Innere Kräfte (die wir nicht genau kennen /  
... kennen müssen!) sorgen dafür daß
  - Einzelne Teile sich „synchron“ bewegen
  - Abstände zwischen Teilen sich nicht ändern



### 1.4.1 Bewegung des starren Körpers



Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Überlagerung von ...

#### Translation

Alle Punkte bewegen sich ...

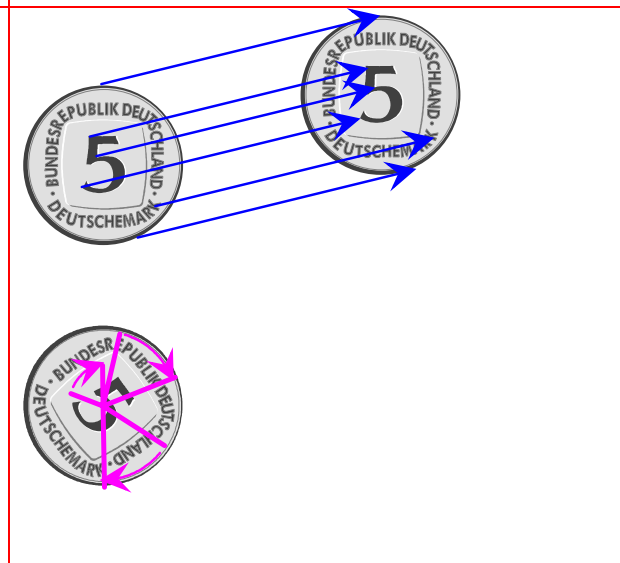
- parallel
- gleich weit
- gleich schnell

und

#### Rotation

Alle Punkte drehen sich ...

- um gemeinsame Achse
- um gleichen Winkel
- mit gleicher Winkelgeschwindigkeit



### Kap. 1.3.1

⇒ System aus Massepunkten, Schwerpunkt, Schwerpunktsystem (SPS)

⇒ Bew. eines Massepunkts (Nr. „i“) läßt sich darstellen als ...

a) Bewegung des Schwerpunkts      und      b) Bew. im SPS:  $\vec{v}_i = \vec{V}_0 + \vec{v}_i^*$

jetzt : **Starrer Körper!**      Abstände zwischen einzelnen Teilen sind fest ...

⇒ Bew. im SPS kann nur noch eine reine ..... **-Bewegung** sein!

Bewegt sich dagegen nur der Schwerpunkt und die einzelnen Teile des st. K. ruhen im SPS so liegt eine reine ..... **-Bewegung** vor!

### Kinetische Energie des st. K.

Mit  $\vec{v}_i = \vec{V}_0 + \vec{v}_i^*$  ergibt sich die gesamte kin. Energie aller Massepunkte des st.K. ...

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}_0 + \vec{v}_i^*)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \vec{v}_i^{*2} + 2\vec{V}_0 \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^*}_{=0 \text{ da SPS!}} + \vec{V}_0^2 \cdot \underbrace{\sum_i m_i}_{=M \text{ (ges.Masse)}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{*2} + \frac{1}{2} M \vec{V}_0^2 \\
 &= E_{kin}^{rot} + E_{kin}^{trans} \qquad \qquad \qquad \text{[Glg.1.4.1.]}
 \end{aligned}$$

Auch ges. **kinetische Energie** des st.K. läßt sich in **Rotationsenergie** (um SP) und **Translationsenergie** (SP-Bewegung, Energie entspr. „Massepunkt“ mit Gesamtmasse, der sich mit SP-Geschw. bewegt) zerlegen!

Im Folgenden wird zunächst nur die **ROTATION** betrachtet (d.h. wir betr. st. K. in seinem SPS) – *ohne die \* immer mitzuschreiben !*

Es ist dann ...

$$\begin{aligned}
 E_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 \quad \text{mit } \vec{v}_i^2 = \omega^2 r_i^2 \quad (\text{alle Punkte } i \text{ haben gleiche Winkelgeschw. } \omega \text{ !}) \\
 E_{rot} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left( \sum_i m_i r_i^2 \right)}_{J_S} \cdot \omega^2 \qquad \qquad \qquad \text{[Glg.1.4.2.]}
 \end{aligned}$$

Das **Massenträgheitsmoment**  $J_S$  ist abh. vom Aufbau des st. K. und beschreibt dessen Trägheit bzgl Rotation (s.a. Kap. 1.2.3, „Dynamik der Drehbewegung“) um eine SP-Achse (Index „S“).

⇒ Für einen st.K., der aus einzelnen diskreten Massepunkten aufgebaut ist, ist die Gesamtmasse  $M = \sum_i m_i$  und das Massenträgheitsmoment  $J_S = \sum_i m_i r_i^2$ .      [Glg.1.4.3.]

⇒ Bei kontinuierlicher Masseverteilung muß die Summation  $\sum_i m_i \dots$  durch eine Integration

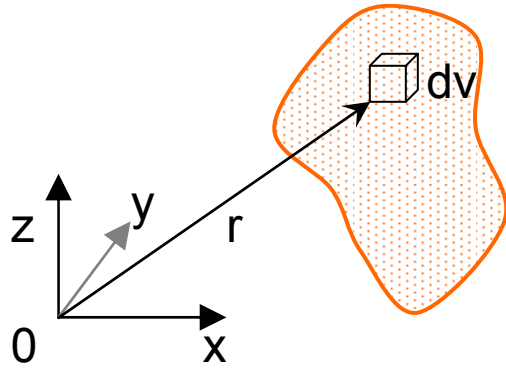
$\int \dots dm$  ersetzt werden → Kap. 1.3.4.2 und 1.3.4.3 !

### 1.4.2 Kontinuierliche Massenverteilung, Masse, Dichte, Schwerpunkt

Betrachte „infinitesimales Volumenelement“,

dieses hat Volumen  $dV$  und Masse  $dm$ . Die Dichte an dieser Stelle ist dann  $\rho = \frac{dm}{dV}$ . Ist der Körper nicht homogen, so hängt die Dichte von  $x, y, z$  ab:  
 $\rho = \rho(x, y, z)$

$$dm = \rho dV \Rightarrow M = \int dm = \int \rho(x, y, z) dV \quad [\text{Glg. 1.4.4.}]$$



Hier muß über das ganze Volumen des Körpers integriert werden  $\Leftrightarrow$  Volumenintegral !

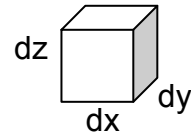
✂ ----- ↓↓↓↓ Mathe. ↓↓↓↓ -----  
Berechnung von Vol.-Integralen:

1. **kartesische Koordinaten**  $x, y, z$ :

Bsp.: Quader (durch Ebenen parallel zu den x-y-z-Achsen begrenzt),

Integrationsgrenzen  $(x_1, x_2)$  etc.:

Das Vol.-Element ist  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$



$$M = \int dm = \int_{Vol.} \rho dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

[Glg. 1.4.5.]

$$= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, y, z) dx \right] dy \right\} dz$$

(3 Integrationen über x-y-z nacheinander auszuführen!)

2. **Zylinderkoordinaten**  $r, \varphi, z$

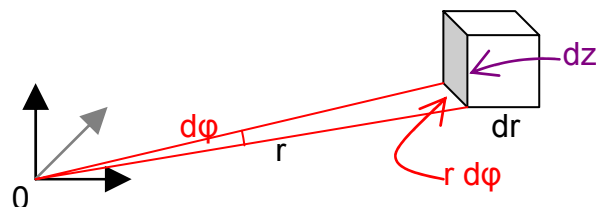
$$x = r \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \varphi$$

Das Vol.-Element ist  $dV = dr \cdot (r d\varphi) \cdot dz$

$$M = \int dm = \int_{Vol.} \rho dV = \iiint_{Vol.} \rho \cdot r dr d\varphi dz$$

[Glg. 1.4.6.]



### 3. Polarkoordinaten $r, \varphi, \vartheta$

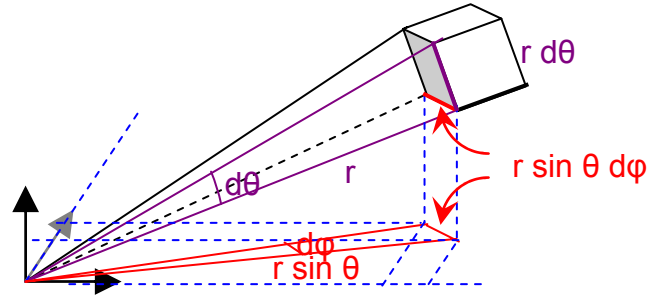
$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Das Vol.-Element ist

$$\begin{aligned} dV &= (dr) \cdot (r \sin \vartheta d\varphi) \cdot (r d\vartheta) \\ &= r^2 \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \end{aligned}$$



$$M = \int dm = \int_{Vol.} \rho dV = \iiint_{Vol.} \rho \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \quad [\text{Glg.1.4.7.}]$$

⌘ -----↑↑↑ Mathe. ↑↑↑-----

Das Haupt-“problem“ bei Ber. von Vol.-Integralen: Beschreibung des Integrationsgebiets (Integrationsgrenzen der **3 (!)** Variablen), d.h. des Volumens, über das integriert wird. Durch Wahl geeigneter Koordinaten und Ausnutzung von Symmetrien der Körper wird dies wesentlich vereinfacht. *Nicht empfehlenswert* wäre es z.B. einen Würfel in Polarkoordinaten oder eine Kugel in kartesischen Koordinaten zu berechnen!

Bsp. für die Anw. der Volumen-Integrale (integr. wird jew. über Volumen des Körpers „K“):

$$\text{Vol. eines Körpers :} \quad V = \int_K dV \quad \left( = \int_K 1 \cdot dV \right) \quad [\text{Glg.1.4.8.}]$$

$$\text{Masse eines Körpers:} \quad M = \int_K dm = \int_K \rho dV \quad [\text{Glg.1.4.9.}]$$

$$\text{Schwerpunkt:} \quad \vec{R}_{SP} = \begin{pmatrix} x_{SP} \\ y_{SP} \\ z_{SP} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_K \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_K \vec{r} \rho dV \quad [\text{Glg.1.4.10.}]$$

$$\text{Massenträgheitsmoment:} \quad J_S = \int_K \vec{r}_p^2 dm = \int_K \vec{r}_p^2 \rho dV \quad [\text{Glg.1.4.11.}]$$

Übungsbsp.: Berechnen **SIE** Masse u. SP eines inhomogenen Würfels der Kantenlänge  $L$

Vorschlag: Legen Sie den Urspr. des kart. Koordinatensystems in die Mitte des W.,

$$x = -L/2 \quad \dots \quad +L/2 \quad (\text{ebenso: } y, z !).$$

Die Dichte kann z.B. linear von  $z$  abhängen:

$$\rho = \rho(x, y, z) = a + b \cdot z \quad (a, b : \text{Konstanten}).$$

**Ergebnis:**

$$M = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} (a + bz) dx dy dz = \dots$$

$$x_{SP} = \frac{1}{M} \int_K x \cdot \rho \, dV = \dots$$

$$y_{SP} = \dots$$

$$z_{SP} = \dots$$

### 1.4.3 Massenträgheitsmomente

- Massenträgheitsmoment bzgl. einer vorgegebenen Achse durch den Schwerpunkt S:  $J_S$   
Wozu brauchen wir  $J_S$  ?

1. kin. Energie :  $E_{rot} = \frac{1}{2} J_S \omega^2 \Rightarrow$  Energieerhaltung [Glg.1.4.12.]

2. Drehimpuls:  $\vec{L} = J_S \cdot \vec{\omega} \Rightarrow$  Drehimpulserhaltung [Glg.1.4.13.]

3. Drehmom.  $\Leftrightarrow$  Winkelbeschl.:  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J_S \cdot \vec{\alpha}$  (wenn  $J_S = const.!$ ) [Glg.1.4.14.]

- Berechnung der Vol.-Integrale läßt sich oft vereinfachen, wenn Symmetrie des Körpers ausgenutzt wird. Statt 3 Integrationen ist dann oft nur eine (nichttriviale) Integration auszuführen.
  - Bei (fast) allen Körpern muß die Drehachse beachtet werden (warum ? Ausnahme: Kugel!)
- Die versch. Methoden der J-Berechnung werden an folgenden Beispielen aufgezeigt.

#### 1. dünnwandiger Hohlzylinder

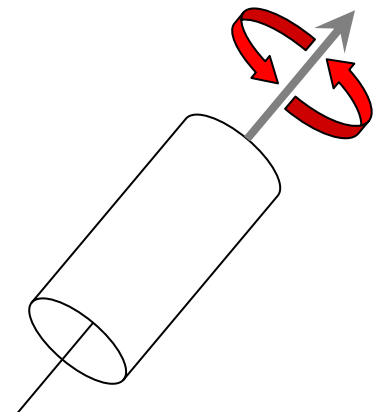
Radius R, Masse M

dünne Wand  $\Rightarrow$  alle Punkte haben Abstd.  $r_p \equiv R$  von Achse

$$J_S = \int_{\text{Hohlzyl}} r_p^2 \, dm = \int_{\text{Hohlzyl}} R^2 \, dm = R^2 \cdot \int_{\text{Hohlzyl}} dm = R^2 M$$

$$\Rightarrow J_S = 1 \cdot MR^2$$

[Glg.1.4.15.]



#### 2. Vollzylinder

Radius R, Länge L, Masse M

a) Integr. in Zylinderkoordinaten:  $r, \varphi, z$ ,

Abstand von Drehachse:  $r_p = r$  !

$$J_S = \int_{\text{Vollzyl.}} r_p^2 \, dm = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$= L \cdot 2\pi \cdot \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\rho \pi R^2 L}_{=M} \cdot R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

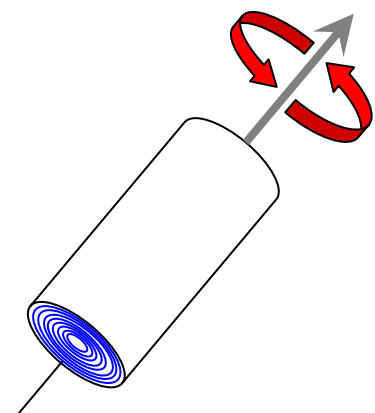
oder anschaulicher  $\Rightarrow$  einfacher (?)

b) Vollzylinder wird in „infinitesimale“ dünnwandige Holzzylinder mit Radius  $r = 0 \dots R$  zerlegt, diese haben

Wandstärke  $dr$ ,

Masse  $dm = \rho \cdot (2\pi r) \cdot L \cdot dr$ ,

Trägheitsmoment  $dJ = r^2 \, dm$  (siehe 1. !)



$$J_S = \int dJ = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \rho 2\pi L \cdot r dr$$

[Glg.1.4.16.]

$$= L \cdot 2\pi \cdot \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

⇒ Erg. wie oben !

### 3. Vollkugel

Radius R, Masse M

a) Integr. in Polarkoordinaten:  $r, \varphi, \vartheta$ ,

Abstd. von Drehachse:  $r_p = r \sin \vartheta$  !

$$J_S = \int_{Kugel} r_p^2 \cdot \rho dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin \vartheta)^2 \cdot \rho \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta$$

Substitution:  $u = \cos \vartheta \quad du = \frac{du}{d\vartheta} \cdot d\vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta$

$$\vartheta = 0 \Rightarrow u = +1$$

$$\vartheta = \pi \Rightarrow u = -1$$

$$\sin^2 \vartheta = 1 - u^2$$

$$J_S = \rho \cdot \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R (1-u^2) \cdot r^4 dr \right) d\varphi \right] du$$

$$= \rho \cdot [2\pi] \cdot \left( \frac{R^5}{5} \right) \cdot \int_{-1}^1 (1-u^2) du = \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \frac{4}{3}$$

$$\text{mit } M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho \Rightarrow J_S = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{[Glg.1.4.17.]}$$

Bem.: Ähnlich wie bei 2. läßt sich die Vollkugel auch als Summe ( $\Rightarrow \int \dots dr$ ) vieler Hohlzylinder ( $L$  ist  $r$ -abhängig, Kreisgl.!) oder auch als Summe vieler dünner Scheiben ( $=$  Vollzylinder, Länge  $dz$ ,  $\Rightarrow \int \dots dz$ ) berechnen. ÜBUNGsaufgabe!

### 4. Hohlkugel (dünnwandig!)

a) „Flächenmasse“ (= Masse/Fläche) :  $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$

Masse eines inf. Flächenelements  $dA$ :  $dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot (R d\vartheta) \cdot (R \sin \vartheta d\varphi)$

$$J_S = \int r_p^2 dm = \int R^2 (1-u^2) dm$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R^4 (1-u^2) \sigma du d\varphi = \dots = \frac{2}{3} MR^2$$

[Glg.1.4.18.]

b) „J(Hohlkugel) = J(Außenkugel) - J(Innenkugel)“

Berechnen Sie J der Außenkugel (Vollkugel, Dichte  $\rho$ , Radius  $R + \Delta R$ ) und

J der Innenkugel (Vollkugel, Dichte  $\rho$ , Radius  $R$ )

sowie die Differenz. Für  $\Delta R \ll R$  ist  $(R + \Delta R)^5 - R^5 \approx 5 \cdot \Delta R \cdot R^4$  (warum ?), damit ergibt sich das Ergebnis wie oben!

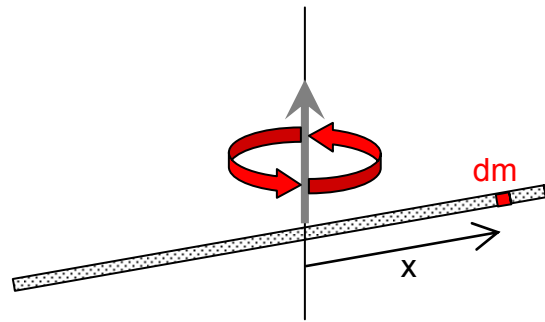
## 5. langer dünner Stab

Masse  $M$ , Länge  $L$ ,  $x = -L/2 \dots +L/2$ ,

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

$$J_s = \int x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2$$

[Glg.1.4.19.]



6. Allgem. (massiver) **Rotationskörper** lassen sich **entweder** darstellen als Summe von ...

a) **dünnwandigen Hohlzylindern** (wie in 3 a).

Dazu muß die „Höhe“  $h(r)$  des Rot.-Körpers als Fkt. des Radius gegeben sein! Ein **dünnw. Hohlzyl.** beim Radius  $r$  (Wandstärke  $dr$ ) hat

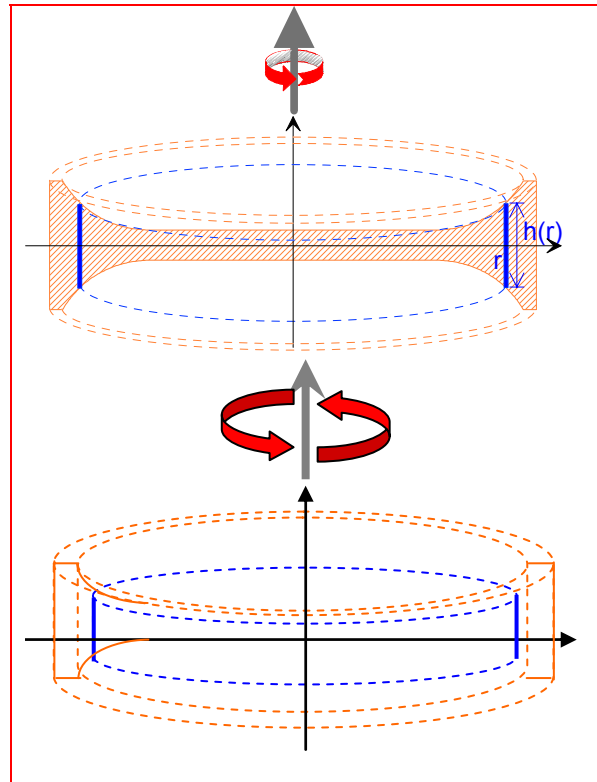
Masse  $dm = \rho \cdot (2\pi r) \cdot h(r) \cdot dr$ ,

Trägheitsmoment  $dJ = r^2 dm$

$$J_s = \int dJ = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot h(r) dr$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho \cdot r^3 \cdot h(r) dr$$

[Glg.1.4.20.]



oder ...

b) als Summe **dünnere Scheiben** (=Vollzylinder). Dazu muß der Radius als Fkt. von  $z$  gegeben sein:  $r = r(z)$ . (Höhe  $H$ ,  $z = 0 \dots H$ )

Eine **dünne Scheibe** bei  $z$  (Dicke  $dz$ ) hat

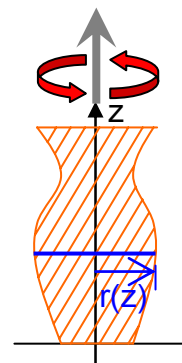
Masse  $dm = \rho \cdot \pi(r(z))^2 \cdot dz$ ,

Trägheitsmoment  $dJ = \frac{1}{2} r^2 dm$

$$J_s = \int dJ = \int \frac{1}{2} r^2 dm = \int_0^H \frac{1}{2} r^2 \cdot \rho \cdot \pi r^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} \pi \int_0^H r^4 \rho dz$$

[Glg.1.4.21.]



Weitere Massenträgheitsmomente:

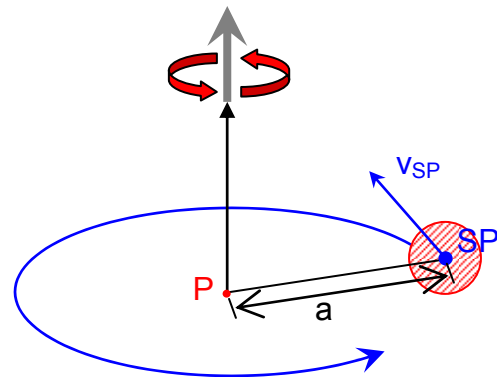
☞ Tabelle in vielen Physikbüchern und (Phys. / Mathe-) Formelsammlungen!

### 1.4.4 Steinerscher Satz

Rotation eines starren Körpers um Achse die **nicht** durch Schwerpunkt SP geht (sondern durch Punkt P im Abstd.  $a$  vom SP)

⇒ Momentangeschw. jedes Massepunkts ergibt sich aus Überlagerung von Rotation und Translation:

- Rotation um SP *plus*
- Bewegung des SP um Rot.-Achse



$$E_{kin} = E_{rot} + E_{trans}$$

$$= \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{SP}^2$$

mit  $v_{SP} = \omega \cdot a \Leftrightarrow$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} M a^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(J_S + M a^2)}_{= J_P} \cdot \omega^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J_P \cdot \omega^2$$

Bei Rot. um **nicht-SP-Achse** ist also lediglich das Massenträgheitsmom.  $J_S$  durch  $J_P$  zu ersetzen:

$$\boxed{J_P = J_S + M a^2} \text{ (Steinerscher Satz) [Glg.1.4.22.]}$$

(in Worten:

Massenträgheitsmom. des ausgedehnten starren Körpers bzgl. SP-Achse



Massenträgheitsmom. einer Punktmasse mit der Gesamtmasse  $M$ , die sich im SP befindet)

### ÜBUNGSAGF.:

Ein Körper (Vollkugel, dünnw. Hohlkugel, Vollzylinder etc. ) rollt eine schiefe Ebene hinunter (Höhe  $h$ , Neigungswinkel  $\varphi$ ) ...

- Welche Geschw hat der Körper am Ende ?
- Wie groß ist die Beschleunigung ?
- Wie groß muß der Haftreibungskoeff. sein, damit der Körper nicht rutscht ?

Sie können den Vorgang auf 2 völlig äquivalente Weisen behandeln ...

- Translationsbew. des SP, Rotation um SP mit Massenträgheitsmom  $J_S$
- Rotation um momentanen „Abrollpunkt“, Massenträgheitsmom.  $J_P$

### 1.4.5 Drehimpuls des Starren Körpers – Kreisel

☺ Bekannt ( ? ) von Mechanik des Massepunkts:  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

Wenn Trägheitsmoment  $J$  ein Skalar ist...

⇒  $L$ -Vektor u.  $\omega$ -Vektor haben gleiche Richtung (Drehachse, Rechte-Hand-Regel!)

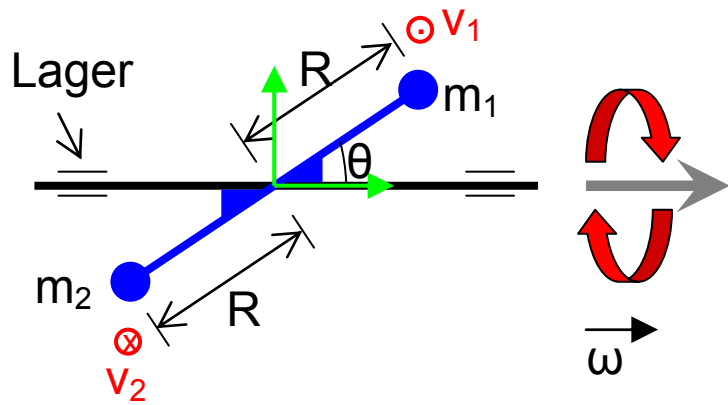
#### **ABER:**

☺ Bei Rotation eines St. K. gilt dies nicht immer ! Nur in Spezialfällen (s.u.) ist  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  !

#### Gegenbeispiel :

- 2 Massepunkte (hier dargest. als Kugeln),  $m_1 = m_2$  ,

- „schräg eingespannt“, d.h. Verbindungslinie bildet festen Winkel  $\vartheta$  zur Achse,  $\vartheta \neq 0^\circ, \vartheta \neq 90^\circ$  !
- Damit die Anordnung wie skizziert um gegebene Achse rotiert, müssen LAGER vorhanden sein!
- In der skizzierten Stellung kommt  $m_1$  gerade aus der Zeichenebene heraus,  $m_2$  bewegt sich in die Zeichenebene hinein.



- Zeichnen Sie die 2 Impulsvektoren  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ , Ortsvektoren  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  und Drehimpulsvektoren  $\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1, \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$  ein! Warum haben  $\vec{L}_1$  u.  $\vec{L}_2$  die gleiche Richtung ?
- Zeichnen Sie den Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$  ein!
- Wie verändern sich der Vektor  $\vec{L}_{tot}$ , wenn sich die Anordnung weiterdreht ?  
Ist  $\vec{L}_{tot}$ , zeitlich konstant ?

- ☞ Diese Anordnung rotiert nur dann um eine feste Achse, wenn diese durch die Lager festgelegt ist.
- ☞ Wegen  $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \dots$  müssen die Lager ständig ein ..... auf die Anordnung ausüben!
- ☞ **W-H-W-L-K** ? Beim starren Körper zeigt der Drehimpulsvektor nicht notwendigerweise in die gleiche Richtung wie die momentane Winkelgeschwindigkeit (momentane Drehachse) !
- Im obigen Beispiel ist  $\vec{\omega}$  fest,  $\vec{L}_{tot}$  hat eine andere Richtung und dreht sich mit der Anordnung mit, damit ist  $\vec{L}_{tot}$  nicht konstant  $\Rightarrow$  Lager müssen Momente ausüben!
- Bei einem kräftefrei rotierenden starren Körper ist  $\vec{L}_{tot}$  konstant (Drehimpulserhaltung !).  
Falls dann  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}_{tot}$  verschiedene Richtungen haben ist die momentane Drehachse (Richtung von  $\vec{\omega}$ ) nicht zeitlich konstant, der Körper „taumelt“, „eiert“ ...!

Ergänzende Anmerkung: Auch wenn  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}_{tot}$  nicht parallel sind kann die Gl.  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$  verwendet werden, allerdings ist  $J$  kein Skalar mehr (Mult. mit Skalar ändert nicht die Richtung eines Vektors!), sondern eine  $3 \times 3$  - Matrix (der - symm. - „Trägheitstensor“):  
 $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ , ausgeschrieben als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ...

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Der Drehimpuls einer rotierenden Punktmasse ist (s. Kap. 1.3.4)

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Damit Drehimp. eines Systems  $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

Anw. des entspr. Entwicklungssatzes für das doppelte X-Produkt

$$[\text{„bac-cab-Regel“: } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad ] :$$

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

Ausgeschrieben in Komponenten bedeutet dies z.B. für die x-Komponente ...

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m_i [\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= \sum m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y (x_i y_i) - \omega_z (x_i z_i)] \end{aligned}$$

Alle 3 Komp. lassen sich dann zu einer Matrixgl. zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad [\text{Glg. 1.4.23.}]$$

Bei „hinreichend symmetrischen“ Körpern (und passender Wahl des Koordinatensystems) (siehe unten) verschwinden aus Symmetriegründen die „gemischten Produktsummen“ der Nichtdiagonalelemente. Dann bewirkt eine Rotation um die x-Achse (nur  $\omega_x$  !), daß auch  $\vec{L}$  nur eine x-Richtung hat etc. :  $\Rightarrow$  **Hauptträgheitsachsen!** Die 3 Diagonalelemente sind dann die **Hauptträgheitsmomente**.

Übungsafg.: Bestimmen Sie den Trägheitstensor für das oben angeg. „System aus zwei schräg eingespannten Massepunkten“

z.B. für den Spezialfall  $\vartheta = 45^\circ$ , d.h.  $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$  (mit  $a = R/\sqrt{2}$ )

Berechnen Sie damit den Drehimpuls bei einer Rotation mit  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  !

Ohne Beweis ...

- Bei jedem beliebigen starren Körper lassen sich 3 Achsen x-y-z finden, so daß bzgl. dieser Achsen der Trägheitstensor diagonal ist :  $\Rightarrow$  **Hauptträgheitsachsen** (HTA)
- Die zugehörigen Diagonalelemente heißen **Hauptträgheitsmomente**
- Bei Rotation um eine HTA ist  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ , dann gilt  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$  mit skalarem  $J$ ,  
für  $\vec{\omega} = \text{const.}$  ist auch  $\vec{L} = \text{const.}$ , der Körper rotiert ohne äußere Momente (ohne Lager!). Die HTA heißen deshalb auch **freie Achsen**.
- Freie, nicht fixierte Rotation um die HTA mit maximalem und minimalem  $J$  ist **stabil**, die Rotation um die HTA mit mittlerem  $J$  ist **labil**
- Die Symmetrieachsen des Körpers (z.B. Zylinderachse etc.) sind HTA, bei beliebigen unsymmetrischen Körpern gilt ...  
HTA sind :
  1. Achse mit max.  $J$
  2. Achse mit min.  $J$  (steht immer senkrecht auf 1. !)
  3. zu 1. und 2. senkrechte Achse

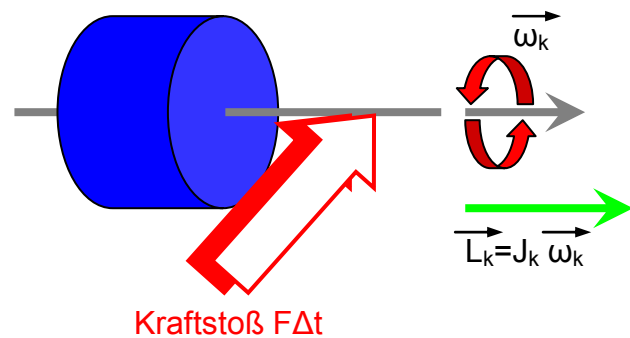
- Ein Körper, dessen 3 Hauptträgheitsmomente verschieden sind, heißt unsymmetrischer Kreisel
- Ein Körper mit 2 gleichen Hauptträgheitsmomenten heißt symmetrischer Kreisel. Die Wahl der Richtungen der 2 Hauptachsen in der entspr. Ebene ist in diesem Fall beliebig (nur senkrecht auf einander und senkrecht zur 3. Achse müssen sie liegen!)
- Jeder Rotationskörper (Symmetrieachse : z) ist ein symmetrischer Kreisel, es ist dann  $J_z \neq J_x = J_y$

Bsp.: Damit ein Rad (Auto!) ohne Lagerkräfte frei rotieren kann, muß das Rad nicht nur „statisch“ (Drehachse geht durch Schwerpunkt!) sondern auch dynamisch (Drehachse ist HTA!) ausgewuchtet werden.

Die allg. Bewegung eines Kreisels (insbes. des unsymm. Kreisels) wird hier nicht behandelt ...  
aber einige Spezialfälle:

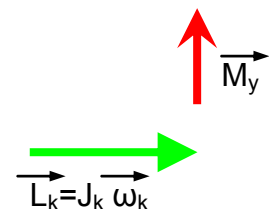
### Nutation

- Ein symm. Kreisel rotiere kräftefrei (Kreisel im SP unterstützt, um alle 3 Richtungen drehbar  $\Rightarrow$  „kardanische Aufhängung“) um seine Symmetrieachse „k“
- Symm.-A. ist HTA, also  $\vec{L}_k = J_k \cdot \vec{\omega}_k$  (= const.) und  $\vec{L}_k \parallel \vec{\omega}_k$  !



dann ...

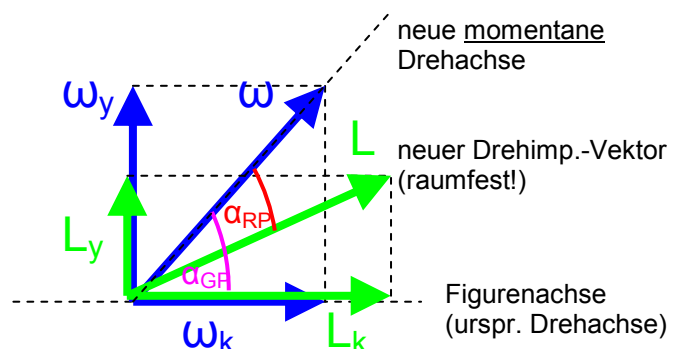
- Kreisel erhält einen „Schlag“, Kraftstoß:  
Für kurze Zeit wirkt ein **Moment**  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  auf den Kreisel, dieses hat z.B. eine Komponente in y-Richtung ...



- Wg.  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ ,  $\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{M}_y dt = \vec{L}_y$  hat der Kreisel nun eine Drehimpuls-Komp. in y-Richtung (senkrecht zu seiner Symmetrieachse)

- Für die y-Richtung gilt ein **anderes Trägheitsmoment!!!**

- Zwischen  $\omega_y$  und  $L_y$ ,  $\omega_k$  und  $L_k$  stehen **verschiedene Faktoren** !

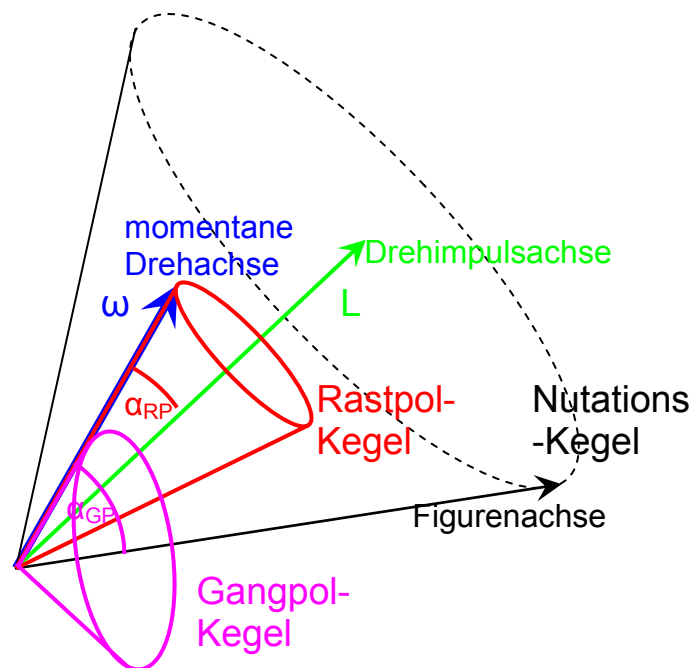


- Es ist  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_k + \vec{\omega}_y$ ,  $\vec{L} = \vec{L}_k + \vec{L}_y$ ,

[Glg.1.4.24.]

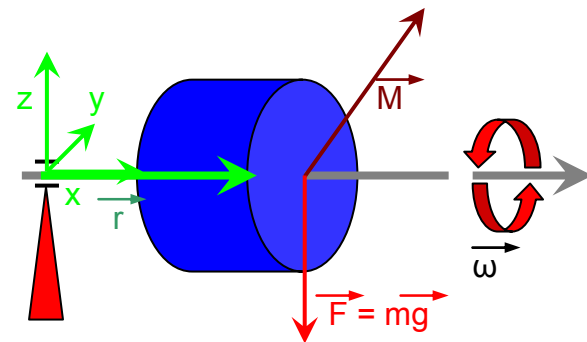
aber  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  sind **nicht parallel**! Kreisel rotiert nicht mehr um HTA!

- Nach dem „Schlag“ ist  $\vec{L}$  wieder konstant - und raumfest!
- Die momentane Drehachse steht im Winkel  $\alpha_{RP}$  zur  $\vec{L}$ -Achse. Sie dreht sich um die raumfeste  $\vec{L}$ -Achse herum und bildet den „Rastpolkegel“ (halber Öffnungswinkel  $\alpha_{RP}$ ). Die „Figurenachse“ steht im Winkel  $\alpha_{GP}$  zur momentanen Drehachse und bildet die Symmetrieachse des „Gangpolkegels“ (halber Öffnungswinkel  $\alpha_{GP}$ ), der sich auf dem Rastpolkegel abwälzt.



## Präzession

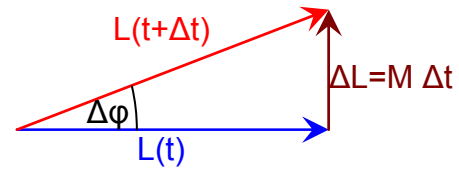
- Ein symm. Kreisel rotiere um seine Symmetrieachse.  
Aber: nicht kräftefrei, auf Kreisel wirkt ständig ein **Drehmoment**!
- Bsp.: a) Rad, nur einseitig gelagert, Gewichtskraft  $\Rightarrow$  Drehmoment  
b) Proton (hat „Eigen“-Drehimpuls (Spin) u. magn. Moment) in einem Magnetfeld. Magnetfeld bewirkt Drehmoment auf Proton.



- Rotation um HTA muß „schnell genug“ (s.u.) sein,  
 $\Rightarrow$  Drehimpuls:  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$  mit Hauptträgheitsmoment  $J$ !
- dauernd wirkendes Drehmoment  $\Rightarrow$  Drehimpulsvektor ist nicht konstant,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$   
( 1.  $\vec{M} \parallel \vec{L}$ :  $|\vec{L}|$  ändert sich (d.h. lediglich die Drehzahl wird vergrößert/verkleinert) )  
2.  $\vec{M} \perp \vec{L}$ :  $|\vec{L}| = const.$ , Richtung ändert sich,  $\Rightarrow$  **Präzessionsbewegung** des Kreisels
- Bei Präzession ändert sich Richtung der Kreiselachse mit Winkelgeschw.  $\omega_p$ :

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{|\vec{L}|} \cdot \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|} \quad [\text{Glg. 1.4.25.}]$$

$$\omega_p = \frac{M}{J\omega}$$



☞ für  $\omega \rightarrow 0$  folgt  $\omega_p \rightarrow \infty \dots$  ,

aber: die Gl. wurde nur für den Fall abgeleitet, daß der Kreisel um eine HTA rotiert !

Dazu muß die Winkelgeschw.  $\omega_p$  gegen  $\omega$  vernachlässigbar sein ( $\omega \gg \omega_p$ )

- **Zwangsdrehung** (erzwungene Präzession):  
Kreisel wird von außen zu einer Drehung seiner Achse gezwungen  $\Rightarrow$  Momente auf Lager:  
 $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p$
- „gleichsinniger Parallelismus“: Kreisel versucht, Richtung seines Drehimp.-Vektors auf kürzestem Wege gleichsinnig parallel zum Vektor der „Störung“ (Drehmoment, Zwangsdrehung) zu stellen.

Beispiele für Anw. des Kreisels, der Kreiselgesetze:

1. Kurskreisel : Kräftefrei aufgehängter Kreisel, einmal eingestellte Richtung bleibt erhalten
2. Kreiselkompaß: Kreisel so gelagert, daß sich seine Achse nur in Horizontalebene bewegen kann. Erdrotation  $\Rightarrow$  Zwangsdrehung  $\Rightarrow$  Kreisel stellt Achse parallel (\*) zum  $\omega$ -Vektor der Erddrehung, d.h. nach Norden.  
\* genauer: ... „möglichst parallel“, genau parallel geht nur am Äquator!
3. Lagestabilisation durch Kreisel. Z.B bei Satelliten wird Lage durch „Drallräder“ stabilisiert und kontrolliert. Taumeln des Satelliten (Nutation) kann mit Drallrädern abgefangen werden. Da Drehzahl der Drallräder begrenzt ist, muß Satellit von Zeit zu Zeit Drehimpuls „abgeben“ – wie ?

#### 4. Kernspinresonanz:

Viele Atomkerne haben einen Eigendrehimpuls (Spin) und ein magn. Moment. In äußerem B-Feld präzedieren die Spins mit Winkelgeschw.  $\omega_p$ .

Wird eine elektromagnetische Welle („HF-Puls“) mit genau dieser Frequenz eingestrahlt ( $\Rightarrow$  Resonanz) dann können die Spins umgeklappt und der resultierende (makroskopische) Magnetisierungsvektor gedreht werden. Auch dies läßt sich wieder als Präzessionseffekt verstehen. Die em-Welle besteht aus einem rechts- und einem linkszirkular polarisierten Anteil ( $\rightarrow$  Kap. Wellen!). Der „richtig“ drehende Anteil dreht sich synchron mit den präzedierenden Spins. Im mitrotierenden Bezugssystem ergibt sich dann ein konst. B-Vektor. Die Spins führen in diesem System ebenfalls eine Präzessionsbewegung aus. Durch die Dauer des HF-Pulses kann der Drehwinkel dieser Präzessionsbewegung eingestellt werden

Der gedrehte und im äußeren Magnetfeld rotierende Magnetisierungsvektor erzeugt in Empfängerspulen ein Induktionssignal. Mit Kernspinresonanz können kleine, z.B. von der chem. Bindung abhängige Veränderungen der Energieniveaus gemessen werden (wichtiges Verfahren zur Ermittlung von chem. Strukturformeln!). Ist das äußere Magnetfeld nicht völlig homogen sondern von (schwachen) „Gradientenfeldern“ (in x/y/z- Richtung) überlagert, so kann Kernspinresonanz auch ortsaufgelöst beobachtet werden (**Kernspintomographie**).  $\Rightarrow$  Vorl. „Kernphysikalische Meßverfahren“