1.3 **Erhaltungssätze** *der Mechanik*

Mechanik :
- Statik
- Kinematik - Beschr. v. Bewegungen
- Dynamik - Kräfte und ihre Wirkungen

Grundproblem der Dynamik: Kraft ⇨ Newton II ⇨ Dgl ⇨ Lösung : $\vec{r}(t)$
oft aber … Kraft nicht (vollständig) bekannt, Dgl zu kompliziert …

Viele Probleme sind (ohne großen math. Aufwand) mit Hilfe von **Erhaltungssätzen** lösbar. Erhaltungssatz: Irgendeine Größe XYZ beibt (unter best. Umständen …) konstant, d.h. XYZ ändert sich bei einem phys. Vorgang **nicht**: $XYZ_{vorher} = XYZ_{nachher} = XYZ_{zwischendurch} = \ldots$

Bsp: Erhaltung der elektr. Ladung: Ladung kann <u>nicht erzeugt</u> und <u>nicht vernichtet</u> werden. Die Gesamtladung in einem geschlossenen System ist konstant …

- Wichtige Erhaltungssätze : Impuls, Energie, Drehimpuls, el. Ladung. In der Quantenphysik kommen noch andere hinzu (Parität, …)
- Kein Erhaltungssatz gilt z.B. für die **Entropie** (kann <u>erzeugt</u> aber <u>nicht vernichtet</u> werden) oder für die Anzahl von Gummibärchen (können <u>erzeugt</u> und <u>vernichtet</u> werden)

1.3.1 Impulserhaltung

Erinnerung: Impuls = <u>Masse * Geschwindigkeit</u>, Impuls ist ein **Vektor**

nichtrelativistisch: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ [Gl.1.3.1.]

relativistisch: $\vec{p} = m_0\gamma \cdot \vec{v} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \vec{v}$ [Gl.1.3.2.]

Lichtquanten (Photonen), $m_0 = 0$: $|\vec{p}| = \dfrac{h}{\lambda}$ (h: Planck-Konst., λ: Wellenlänge)

[Gl.1.3.3.]

2 Körper A u. B, Kraft A → B , B → A

3. Newton-Gesetz („actio = reactio“) : $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

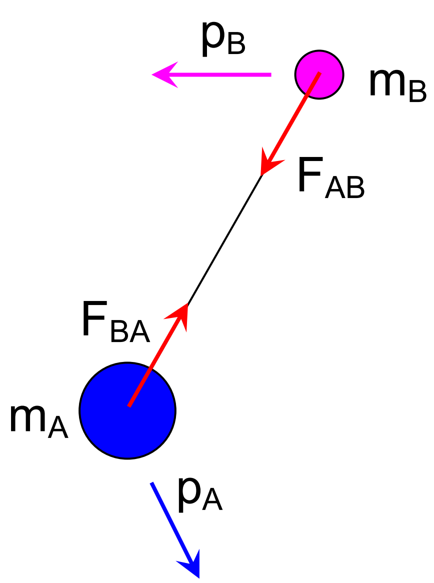
2. Newton-Gesetz („F=m a“):

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = \vec{F}_{BA} \text{ u. } \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}_{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \vec{0}$$

oder $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$, $\dfrac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \vec{0}$, $\vec{p}_{tot} = const.$

[Gl.1.3.4.]

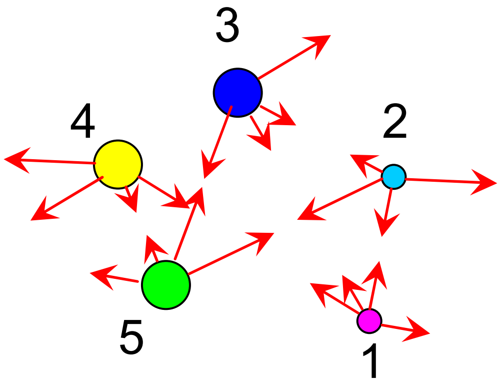


- Impuls jedes Einzelkörpers ändert sich (Kräfte!)
- **Gesamtimpuls** ist **konstant**

- … unabhängig davon, welche Kraft wirkt ! Einzige Voraussetzung: nur **<u>innere Kräfte</u>** zwischen den Körpern (Impulssatz ist äquivalent zu „actio = reactio“)

- mehr als zwei Körper :
  innere Kräfte heben sich paarweise weg

  ⇨ $\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = const.!$ [Gl.1.3.5.]



Der **<u>Impulserhaltungssatz</u>**

- gilt immer – auch wenn Kräfte wirken oder sich die kin. Energie verändert! (aber: alle Körper berücksichtigen!)
- gilt für den **<u>Impuls-Vektor</u>** ⇨ x , y und z !

Bei „eindimensionalen Problemen“ spart man sich oft die Vektorpfeile …
Vektor-Richtung ⇨ Vorzeichen der (x-) Komponente !
Achtung: Schreibweise v_1 etc. („*ohne Vektorpfeil*“) wird verwendet für
a) Betrag des Vektors ($|\vec{v}_1|$, immer >0!)
b) (bei eindim. Problemen) für die (x-) Komponente des Vektors in Richtung einer Achse (z.B. x-Richtung) , mit Vorzeichen!

Afg./Bsp.: Feder beschleunigt 2 Körper mit Massen m_1, m_2 :
wie groß ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten ? Vorzeichen ?

<u>Impulssatz</u> / „actio = reactio“ ist verknüpft mit
1.3.1.1 „<u>Schwerpunktsatz</u>“ und (bei 2 Körpern) mit dem
1.3.1.2 „<u>Zweikörperproblem</u>“ (Bechr. der Bew. von 2 K., <u>reduzierte Masse</u>)

1.3.1.1 Schwerpunktsystem, Schwerpunktsatz

Geschw. , Impuls eines Körpers ➔ abhängig vom Bezugssystem!

- Ein Bez.-System (S´ , z.B. „Zug“) bewege sich (gegen „Laborsystem“ S) mit $\vec{V}_0$ (konst.)
- Geschw. eines Körpers im Syst. S´ : $\vec{v}'$
- Geschw. eines Körpers im Syst. S : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_0$

  ⇨ $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0$

- auch der Gesamtimpuls $\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i$ eines Systems ist abhängig vom Bezugssystem!
- suche ein spezielles Bezugssystem S* in dem $\vec{p}^{\,*}_{tot} = \vec{0}$ wird,
  dies ist das

SCHWERPUNKTSYSTEM (SPS)

Aus Impulserhaltung folgt …

- ist System S* (das sich mit mit $\vec{V}_0$ bewegt) bei $t = 0$ SPS (d.h. Ges.-Impuls <u>ist</u> Null)
- dann ist S* auch bei beliebigen Zeiten t SPS (d.h. Impuls <u>bleibt</u> Null!)

SPS bewegt sich also (sofern keine äußeren Kräfte wirken) mit der **konstanten** Geschwindigkeit $\vec{V}_0$ (bzw. bleibt in Ruhe falls wir bereits im SPS sind!)

- Der SP eines Systems von Teilchen bewegt sich also wie ein Massepunkt (Gesamtmasse $M = \sum m_i$) gem. den Newton-Gesetzen (hier: 1. Newtonsches Gesetz)
- **äußere** Kräfte ⇨ Änderung des **Gesamt**impulses: $\vec{F}_a = \sum_i \vec{F}_{a_i} = \frac{d\,\vec{p}_{tot}}{d\,t}$

  (innere Kräfte heben sich paarweise weg!)

  ⇨ SP bewegt sich dann beschleunigt, Beschl. entspricht der eines Massepunkts mit Gesamtmasse M auf den $\vec{F}_a$ wirkt: $\vec{a}_{SP} = \frac{\vec{F}_a}{M}$

Berechnung der Schwerpunktgeschw. $\vec{V}_0$:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \left(\vec{v}_i^{\,*} + \vec{V}_0\right)$$

$$= \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{=\vec{0}\text{ (SPS!)}} + \vec{V}_0 \cdot \sum m_i$$

somit : $$\vec{V}_0 = \frac{\vec{p}_{tot}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

wegen $$\vec{v}_i = \frac{d\,\vec{r}_i(t)}{d\,t}$$

ist $$\vec{V}_0 = \frac{d\left(\frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i(t)}{\sum m_i}\right)}{d\,t}$$

D.h. Schwerpunktgeschw. $\vec{V}_0$ ist zeitl. Abltg. des SP-Ortsvektors $\vec{R}_{SP} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i(t)}{\sum m_i}$

Damit kann SP-Geschw. u. Position für bel. Teilchensystem berechnet werden:

- SP-Position als mit Masse m_i <u>gewichteter Mittelwert</u> der der Positionen der Massen i:
  $$\vec{R}_{SP} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i(t)}{\sum m_i} \qquad \text{[Gl.1.3.6.]}$$
- SP-Geschw. als mit Masse m_i <u>gewichteter Mittelwert</u> der der Geschwindigkeiten der Massen i : $\vec{V}_0 = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$ [Gl.1.3.7.]

Bem.: bei ausgedehnten Körpern mit kontinuierlicher Masseverteilung (Dichte $\rho = \rho(x, y, z)$) wird integriert (Volumenintegrale) statt summiert:

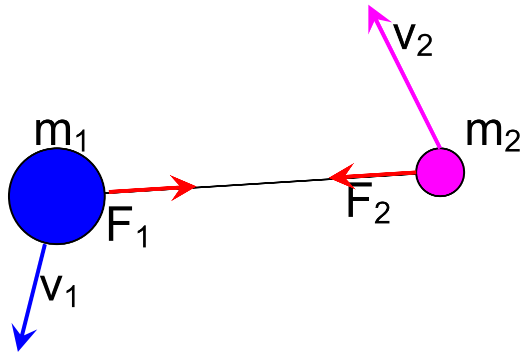
$\sum m_i \ldots \quad \Rightarrow \quad \int \ldots d\,m = \int \ldots \rho\, d\,V$ (dV: Volumenelement)

Übung: SP einer Bier- , Cola-, …-Dose als Fkt. des „Abtrinkgrades“ !

1.3.1.2 Zweikörperproblem, reduzierte Masse

Zwei Körper,

beide bewegen sich …



- keine äußeren Kräfte

aber …
WW zwischen den 2 Körpern,

Kraft hängt von $\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)$ ab!

Bsp.:

- 2 Körper, beide beweglich, über Feder verbunden (Schwingung und/oder Rotation)
  2 Atome in einem Molekül
- Elektron u. Proton im H-Atom
- Elektron u. Positron im „Positronium-Atom“
  …

Newton III ⇨ $\vec{F}_1 = +\vec{F} \quad , \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}$

Newton II

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\,\vec{r}_1(t)}{d\,t^2} = +\frac{1}{m_1}\cdot\vec{F}\big(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)\big) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\,\vec{r}_2(t)}{d\,t^2} = -\frac{1}{m_2}\cdot\vec{F}\big(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)\big) \qquad (2)$$

2 **gekoppelte** Dgl. ! Jede Dgl. enthält beide Unbekannte $\vec{r}_1(t)$ u. $\vec{r}_2(t)$! ☹

⇨ Transformation (⇨ Relativbewegung) : Gl. (1) - Gl. (2)

⇩

$$\frac{d^2\,\vec{r}_1(t)}{d\,t^2}-\frac{d^2\,\vec{r}_2(t)}{d\,t^2} = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\vec{F}\big(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)\big)$$

$$\frac{d^2\big(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)\big)}{d\,t^2} = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\vec{F}\big(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)\big)$$

$$\frac{d^2\,\vec{r}_{21}(t)}{d\,t^2} = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\vec{F}\big(\vec{r}_{21}(t)\big) \qquad (\text{mit } \vec{r}_{21}=\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$\underbrace{\frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}}_{\mu}\cdot\frac{d^2\,\vec{r}_{21}(t)}{d\,t^2} = \vec{F}\big(\vec{r}_{21}(t)\big) \qquad (*)$$

[Gl.1.3.8.]

Gl. (*) entspr. **N. II** („*F* = *m a*“) für <u>einen</u> Körper, aber :

- (*) beschreibt die **<u>Relativbewegung</u>** der 2 K. ($\vec{r}_1-\vec{r}_2$!)
- enthält statt Masse *m* die **<u>reduzierte Masse</u>** $\mu = \frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}$!

W-H-W-L-K ? ☞ Bewegung von 2 Körpern (zwischen denen irgendeine, z.B. vom Abstand abhängige innere Kraft wirkt) läßt sich berechnen wie die Bewegung eines <u>einzelnen</u> Körpers, der sich in einem (festen) Kraftfeld bewegt:

- statt der (trägen) Masse von Körper 1 oder 2 wird die .... des Zweikörpersystems verwendet
- statt der Koordinaten (Ortsvektoren) von Körper 1 oder 2 werden .... verwendet.

Wie erhält man (wenn erst einmal $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ berechnet ist) wieder die Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ der beiden einzelnen Körper? Beachten Sie Kapitel 1.3.1.1 !

Wegen $\mu = \dfrac{m_1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}$ ist die reduzierte Masse …

- immer (*noch*) kleiner als die kleinere der beiden Massen !
- bei *sehr kleiner* / *großer* M. („Apfel/Erde") ≈ kleine Masse ! $m_1 << m_2 \quad \Rightarrow \mu \approx m_1$

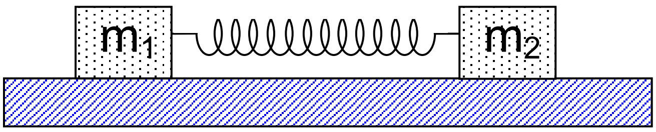
- 2 Körper gleicher Masse :
  $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \mu = \dfrac{m}{2}$

Bsp.: 2 Körper, mit Feder verbunden
Wie groß ist die Schwingungsfrequenz, wenn
a.) ein Körper festgehalten wird ?

$\omega = \ldots$

b.) beide beweglich sind ?

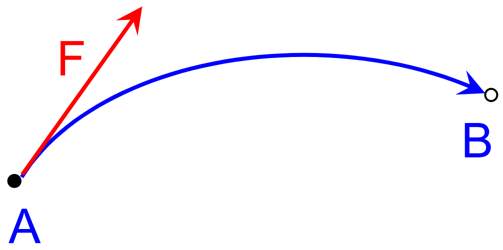
$\omega = \ldots$



c.) was ergibt sich bei a.) und b.) falls $m_1 << m_2$?

1.3.2 Arbeit und Energie

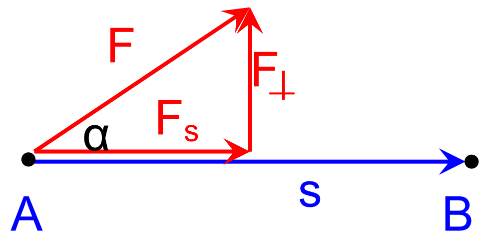
1.3.2.1 Arbeit



Arbeit = „Kraft * Weg“ [Gl.1.3.9.]
(Einh.: 1 J = 1 Nm !)

- Körper wird von „A“ nach „B“ bewegt.
- Kraft dazu: $\vec{F}$

  ☞ Dabei wird **Arbeit** W verrichtet



- Arbeit (im physikalischen Sinne) nur durch Komp. der Kraft in <u>Wegrichtung</u>!
- $W = F_s \cdot s$
- Falls $\vec{F} \perp \vec{s} \Rightarrow W = 0$

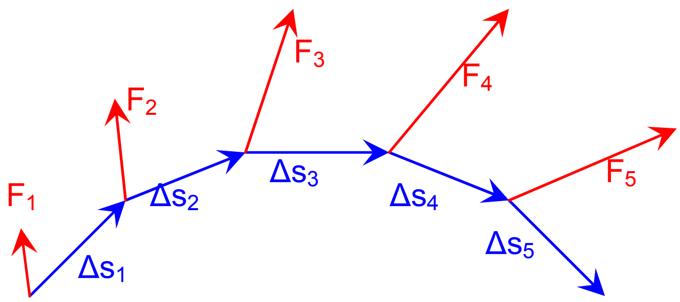
- $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$
  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ [Gl.1.3.10.]
  (Arbeit : „Skalarprodukt aus Kraft- u. Weg-Vektor“)

So einfach nur wenn …

- Kraft konstant (Betrag und Richtung !)
- Weg geradlinig !

… andernfalls

1.3.2.2 Arbeit bei veränderlicher Kraft



- Weg in einzelne (kleine) Teile zerlegen
- Arbeit ΔW für jedes Stück einzeln ausrechnen!
  $W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$ [Gl.1.3.11.]

- Übergang zu „differentiellen Größen“ … $\mathrm{d}W = F_s\,\mathrm{d}s$ $\quad W = \int F_s\,\mathrm{d}s$

  allg., bei veräderl. Winkel zw. Kraft und Weg : $\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$ $\quad W = \int\limits_{\substack{A \\ Weg\,\ldots}}^{B} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$ [Gl.1.3.12.]

☞ Linien- oder Kurvenintegral (siehe Mathe-🕮 !)

- die zu integrierende Fkt. („Integrand") ist ein Vektor ($\vec{F}$)
- „Integr.-Variable" ist ebenfalls ein Vektor („ $\mathrm{d}\vec{s}$ ")
  Skalarprodukt $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$!
- anstatt über ein „x-Intervall" wird von einem Raumpunkt A bis zu einem Raumpunkt B integriert!
- Der Weg, auf dem der Körper von A nach B bewegt wird, muß spezifiziert werden!
  Nur bei speziellen Kräften ist die Arbeit unabh. vom Weg!
  Gegenbsp.: Reibung – auf dem kürzesten Weg wird (*in der Regel!)* die geringste Arbeit verrichtet!

Berechnung der Arbeit mit **Linienintegralen**:

Bsp.: idealisierte Feder wird gespannt (2-dim.) vom Punkt A (0,0) zu Punkt B (R,R)

Kraft: Die Rückstellkraft (Federkraft) ist $\vec{F}_{el} = -c\vec{r}$.

ACHTUNG: Wir bewegen beim Spannen der Feder den Körper mit äußerer Kraft (z.B. „von Hand") **gegen** die Federkraft! Zur Berechnung der verrichteten Arbeit wird diese äußere Kraft gebraucht: $\vec{F} = -\vec{F}_{el} = c\vec{r} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Arbeit : $$W = \int\limits_{\substack{A \\ Weg\ldots}}^{B} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\substack{A \\ Weg\ldots}}^{B} \underset{?-?-?-?-?-?-?-?-?-?-?}{\left(F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y\right)}$$ ☠ 💣 ☹

Beachte:
Dabei muß – unter Beachtung der gewählten Wegkurve – **gleichzeitig** über x und y integriert werden!

⇨ Auf eine einzige Integration zurückführen …
dazu :

- Wegkurve in Parameterdarstellung …
  oder
- Kurve y als Fkt. von x gegeben: $y = y(x)$
  (oder : $x = x(y)$, was wäre dann unten zu ändern ???)

mit $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \mathrm{d}y = y'\cdot\mathrm{d}x \quad \left(= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x\right)$$

$$\mathrm{d}W = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y$$

wird $$\mathrm{d}W = \left(F_x + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_{x_A}^{x_B}\left(F_x + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \quad (*) \qquad \text{[Gl.1.3.13.]}$$

Linienintegral ⇨ best. Integral über x !

In welchen Fällen läßt sich die Ber. mit (*) durchführen ?
Wann wählt man besser y als Variable ?
Wann kann weder x noch y verw. werden ?
Welche Möglichkeiten bleiben dann ?

Übung: Bsp. Feder , Arbeit berechnen auf versch. Wegen …

1. Gerade von (0,0) nach (R,R)
2. a) Gerade von (0,0) nach (R,0) , dann b) von (R,0) nach (R,R)
3. Parabel von (0,0) nach (R,R)
4. Viertelkreis (oberer oder unterer Kreisbogen)

xx …

Bestimmen Sie zunächst jeweils zunächst eine Gl., die den Weg beschreibt!
Berechnen Sie dann die Arbeit durch Integration (über x (*) oder y oder …)

Es ergibt sich bei diesem Bsp. immer die gleiche Arbeit!!! Bsp. für …

1.3.2.3 Konservative Kräfte

Kräfte, bei denen die Arbeit unabhängig vom Weg ist heißen

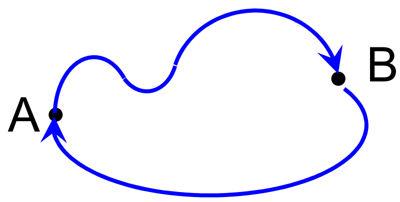
konservative Kräfte.

Bsp.: Elektrostatik, Gravitation, elast. Kräfte (Feder!)

Gegenbsp. - nicht konservativ sind :
Reibung, zeitl. veränderl. el./magn. Kräfte (Trafo, Betatron!)

Arbeit auf Hin- u. Rückweg :

A → B $W_{AB} = \int\limits_{A \atop Weg\ldots}^{B} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$



B → A $W_{BA} = \int\limits_{B \atop Weg\ldots}^{A} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$

Wird für Hin- u. Rückweg der gleiche Weg verwendet
(und hängt die Kraft nur vom Ort ab !!!), so ist
$W_{AB} = -W_{BA}$.

Ist die Kraft konservativ,
so gilt $W_{AB} = -W_{BA}$ **auch wenn Hin- u. Rückweg verschieden sind**!

Geschlossener Weg A → B → A:

Für konserv. Kraft:

- $W_{AB} + W_{BA} = 0$ [Gl.1.3.14.]
- $\oint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$ [Gl.1.3.15.]

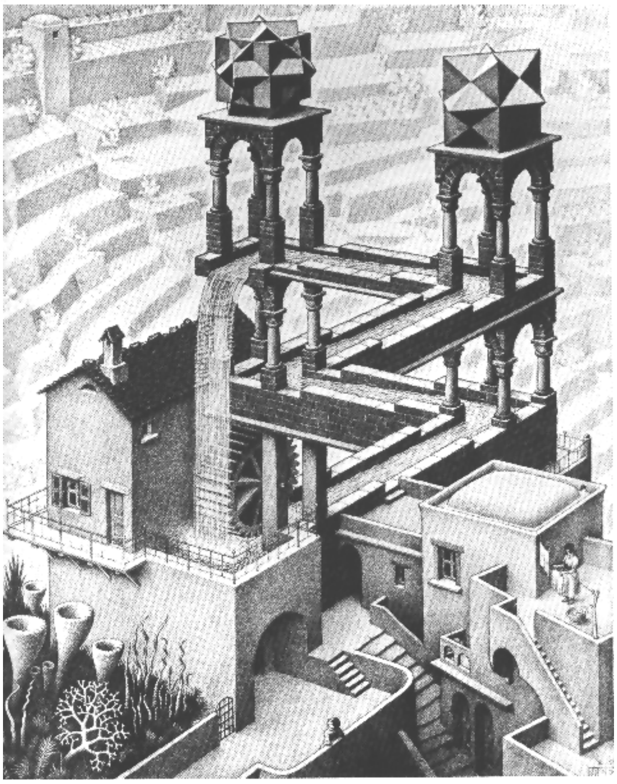
Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn es sich als <u>Gradient</u> eines <u>skalaren</u> Potentialfeldes *V(x,y,z)* darstellen läßt:

- $$\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\, V\,, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

[Gl.1.3.16.]

Begr.: Arbeit = Potential-Differenz, nur abhängig von Punkt A u. B, nicht vom Weg!
Bsp.: Elektrostatik, Gravitation!

Potentialfeld entspricht einer „Höhen*linien*darstellung" des Kraftfeldes. Jedem Punkt wird eine (skalare) Größe (entspr. Höhe) zugeordnet. Die (vektorielle) Kraft erhält man dann durch (Betrag u. Richtung) des „steilsten Abfalls" im „Potentialgebirge" (rechnerisch durch Berechnung der partiellen Ableitungen - siehe oben).



Nur bei M.C. Escher gibt es die „NICHT-KONSERVATIVE Schwerkraft"

- Konservative Felder haben <u>keine Wirbel</u> , keine geschlossenen (Kraft-) Feldlinien (Mathe: Rotation verschwindet, z.B. statisches $\vec{E}$ – Feld: rot $\vec{E} = \vec{0}$!). Auf geschlossener Bahn wird insgesamt keine Arbeit verrichtet bzw. keine Energie gewonnen!

1.3.2.4 Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie
Arbeit bei Beschleunigung eines (trägen) Körpers

Bisher: Massenträgheit vernachlässigt bzw. alle Bewegungsabläufe (A → B) soooooo… langsam, daß Beschleunigungskräfte vernachlässigt werden können.

- Wenn Körper mit (träger) Masse bewegt wird, wird Kraft benötigt, um Masse zu beschleunigen (Newton II).
- Körper bewegt sich in <u>Kraft-Richtung</u> ⇨ <u>**Arbeit**</u> wird verrichtet (um Körper zu beschleunigen!)

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$$

Kraft zur Beschleunigung einer Masse ist (ganz normal) die Kraft nach Newton II. Zur Berechnung der Arbeit muß jetzt über den Weg *s* integriert werden … $W = \int F\,\mathrm{d}\,s$

☞ 3 voneinander abhängige Größen: *s, v, t* **!!!**
→ erst mal aufräumen, d.h. *s* , *t* durch *v* ersetzen …

$$dW = F\,ds = \underbrace{\left(m\cdot\frac{dv}{dt}\right)}_{F=m\cdot a}\cdot ds = \left(m\cdot\frac{dv}{dt}\right)\cdot\frac{ds}{dv}dv$$

$$= m\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dv \qquad \left(\text{mit } \frac{ds}{dt}=v\right)$$

$$= mv\cdot dv$$

→ …dann kann leicht über v integriert werden:

$$W = \int dW = \int mv\cdot dv$$

$$W = m\int_{v_1}^{v_2} v\cdot dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Arbeit für Beschl „von 0 auf v“: $W = m\int_0^v v\cdot dv = \tfrac{1}{2}mv^2$

3-dim , Geschw.-Vektor: $W = \tfrac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \quad (*)$ [Gl.1.3.17.]

Mit **Impuls** $\vec{p} = m\vec{v}$ (statt Geschw.) ergibt sich

$$W = \tfrac{1}{2}m|\vec{v}|^2\cdot\frac{m}{m} \quad ⇨ \quad \boxed{W = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \quad (**)}$$ [Gl.1.3.18.]

Bem.: (**) ist oft einfacher anzuwenden als (*), weil dann direkt der **Impuls** (Erhaltungsgröße!) verwendet werden kann.

1.3.2.5 Energie und Energieformen

An einem System wird Arbeit verrichtet …
dieses System kann anschließend selbst Arbeit verrichten (evtl. in anderer „Form“)
⇨ Arbeit, „Arbeitsvermögen“ wird gespeichert!
Diese **gespeicherte Arbeit**, der Arbeitsvorrat, das Arbeitsvermögen des Systems heißt

ENERGIE

Beispiele:

- Feder wird gespannt (a-b), kann anschließend Körper hochheben (c-d)
- Wasser wird durch Schwerkraft beschleunigt, treibt dann Turbine an …
- Uhrgewicht wird hochgezogen, treibt anschl Pendeluhr an …
- …

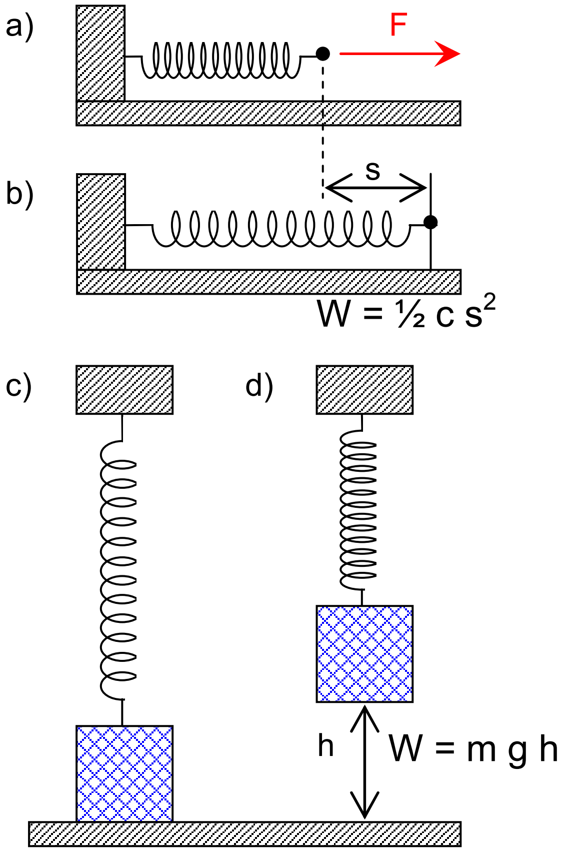
Mechanische Energieformen:

➢ **kinetische Energie**
gespeichert in der Bewegung eines Körpers:

- kin. Energie bei **Translation** : $E = \tfrac{1}{2}mv^2$
- kin. Energie bei **Rotation** $\left(E = \tfrac{1}{2}J\omega^2\right)$

(➔ *Kap. 1.3.5 !*)

- **potentielle Energie**
  unabh. von Geschw., abh. vom Ort:
- Lageenergie (pot. Energie im Schwerefeld der Erde, nahe der Erdoberfl.): $E_{Lage} = mgh$
- Pot. Energie eines el. gel. Körpers im E-Feld: $E_{estat} = q\phi$
- Elast. Energie, gesp. in elast. Verformung eines Körpers: $E_{elast} = \frac{1}{2}cs^2$



Bei allen Energieformen : Nullpunkt muß festgelegt werden,
z.B. Lageenergie: wo ist $h = 0$?
kin. Energie: welches Bezugssystem ? (in welchem System ist $v=0$?)

Einige weitere – auch nichtmechanische – Energieformen :

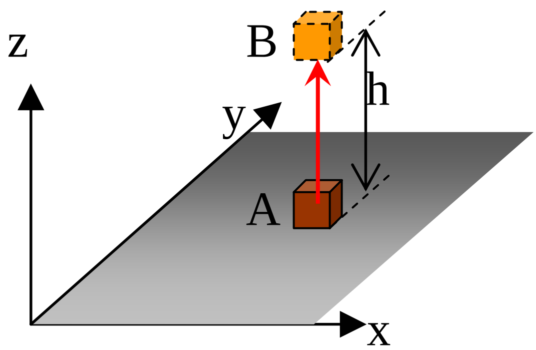
- Energie des elektr. u. magn. Feldes (z.B. in Kondensator/Spule gespeichert)
- Wärmeenergie (innere Energie)
  (kin. Energie, gesp. in der – ungeordneten – Wärmebewegung der Atome/Moleküle)
- Strahlung (Licht, …)
- chem. Energie (Bsp.: Benzin, Gas, Sahnetorte)
- Masse (Einstein: Äquivalenz v. Masse u. Energie, $E = mc^2$)

Potentielle Energie – Beispiele (a – c)

a.) Lageenergie

- **A**($z = 0$) → **B**($z = h$) : Beim Heben (schw. „Lupfa“) eines Körpers wird Arbeit verrichtet (schw. „g’schafft“)

(z-Achse nach oben, betr. z-Komp. der Kraft)



Gewichtskraft : $F_G = -mg$

„Hub-“ Kraft: $F_H = +mg$

Hubarbeit: $W_{Hub} = \int_0^h F_{Hub}\, \mathrm{d}z = \int_0^h + mg\, \mathrm{d}z = +mgh$

Am Körper wird Arbeit verrichtet, seine potentielle Energie wird um *mgh* erhöht.
Wähle : $E_{pot}(A) = 0$ ⇨ $\boxed{E_{pot}(B) = mgh}$ [Gl.1.3.19.]

- **B**(z = *h*) → **A**(z = 0) : Beim Fall nach unten verrichtet die Gewichtskraft F_G Arbeit:

$$W_G = \int_h^0 F_G\, \mathrm{d}z = \int_h^0 - mg\, \mathrm{d}z = -mg \cdot (0 - h) = +mgh$$

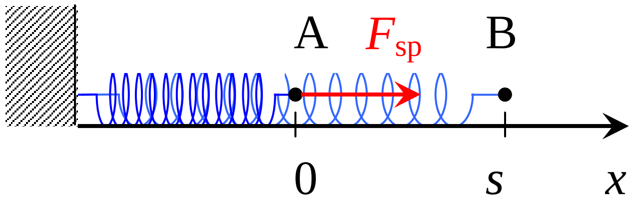
Die von der Gewichtskraft verrichtete Arbeit ist also so groß wie der Unterschied zwischen der potentiellen Energie bei **B** und **A**. Die Hubarbeit wurde als potentiellen Energie „gespeichert“.

b.) **Elastische Energie** einer gespannten Feder

$F_{el} = -cx$

- A → B :

Federkraft:



Kraft zum Spannen d. Feder: $F_{sp.} = -F_{el} = +cx$

Arbeit beim Spannen: $W_{sp.} = \int_0^s F_{sp.}\, \mathrm{d}x = \int_0^s cx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}cs^2$

Diese Arbeit wird als potentielle Energie (hier: elastische Energie) in der Feder gespeichert:
$\boxed{E_{pot}(A) = 0 \quad \rightarrow \quad E_{pot}(B) = \frac{1}{2}cs^2}$. [Gl.1.3.20.]

- B → A : Auf dem Rückweg verrichtet die Federkraft Arbeit:

$$W_{Feder} = \int_s^0 F_{el}\, \mathrm{d}x = \int_s^0 - cx\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}cx^2\right]_s^0 = +\frac{1}{2}cs^2$$

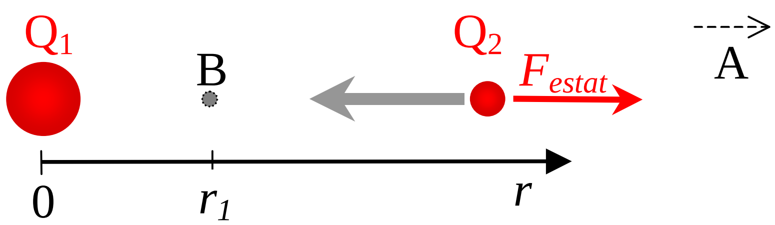
D.h. die als elast. Energie gespeicherte Arbeit wird wieder frei.

c.) Potentielle Energie im elektrostatischen Feld

Elektrostatische Kraft: $F_{estat} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

$Q_1 Q_2 > 0 \Rightarrow F > 0$ (Abstoßung)

$Q_1 Q_2 < 0 \Rightarrow F < 0$ (Anziehung)



- $A \to B$:
  Eine (Punkt-) Ladung Q_2 soll gegen die elektrostatische Abstoßungskraft zwischen Q_1 Q_2 $(Q_1 Q_2 > 0)$ von A („weit weg“, $r \to \infty$) zum Punkt B ($r = r_1$) bewegt werden.

Bem.: Die Lage des „Energie-Nullpunktes“ ist prinzipiell beliebig. Da aber $F \to \infty$ für $r \to 0$, ist es hier nicht sinnvoll, $E_{pot} = 0$ gerade bei $r = 0$ festzulegen!

Wir wählen: $E_{pot} = 0$ für $r \to \infty$

Arbeit, um Q_2 von A ($r \to \infty$) nach B ($r = r_1$) zu bewegen:

$$W = \int_{\infty}^{r_1} -F_{estat}\, \mathrm{d}r = \int_{\infty}^{r_1} -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\, \mathrm{d}r$$

$$= -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r_1} = +\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Es ist $W > 0$, da $Q_1 Q_2 > 0$ (abstoßende Kraft, Arbeit muß verrichtet werden!).

Bei B hat Q_2 deshalb eine höhere potentielle Energie, $\boxed{E_{pot}(B) = +\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}}$ [Gl.1.3.21.]

- Bewegt sich Q_2 weg von Q_1, so verrichtet die elektrostatische Kraft Arbeit

Bsp.: $r_1 \to r_2$, $r_2 > r_1$

$$W_{estat} = \int_{r_1}^{r_2} F_{estat}\, \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{-1}{r_2} - \frac{-1}{r_1}\right)$$

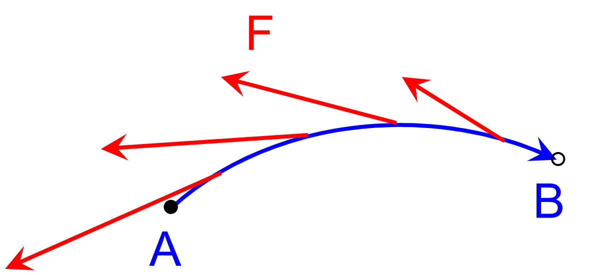
$$= +\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad > 0$$

Diese Arbeit entspricht gerade dem Unterschied der pot. Energie $E_{pot}(r_1) - E_{pot}(r_2)$.

Ergänzung: Ähnliche Formeln gelten für die Gravitation (wenn man nicht nur in der Nähe der Erdoberfläche bleibt). Auch die Gravitationskraft (anziehend !!!) wird wie $1/r^2$ kleiner!

Berechnung der potentiellen Energie eines Kraftfeldes

Geg.: Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, nur vom Ort abh.!



Bewegen Körper in diesem Kraftfeld, z.B. „per Hand“, **gegen** dieses Feld, mit Kraft $\vec{F}_a = -\vec{F}$ von A nach B. Dabei wird von $\vec{F}_a$ Arbeit verrichtet:

$$W_{aAB} = \int_A^B \vec{F}_a\, \mathrm{d}\vec{s} = -\int_A^B \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s}$$

Diese Arbeit wird gespeichert als pot. Energie, die pot. Energie ist bei B also größer als bei A.

$$W_{aAB} = -\int_A^B \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s} = E_{pot}(B) - E_{pot}(A)$$

Wähle: Nullpunkt der pot. Energie beim Punkt A , dann:

$$W_{aAB} = -\int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\,\vec{s} = E_{pot}(B) - \underbrace{E_{pot}(A)}_{=0}$$

$$\Rightarrow E_{pot}(B) = -\int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\,\vec{s} \qquad \text{[Gl.1.3.22.]}$$

Auf dem „**Rückweg**“ B ➔ A (Annahme: Körper kommt unter dem Einfluß des Kraftfeldes wieder zum Punkt A zurück!) leistet das **Kraftfeld** $\vec{F}$ die Arbeit !

$$W_{BA} = \int_B^A \vec{F}\,\mathrm{d}\,\vec{s} = E_{pot}(B) - \underbrace{E_{pot}(A)}_{=0}$$

In Worten: Vom Kraftfeld verrichtete Arbeit vom Anfangspkt. (hier: B) zum Endpkt. (hier: A)
= E_{pot}(**Anfangs**punkt) - E_{pot}(**End**punkt)
>0 falls E_{pot}(**Anfangs**punkt) > E_{pot}(**End**punkt) !

Entsprechend gilt für einen Körper, der sich unter dem Einfluß des Kraftfeldes von **A** nach **B** bewegt (bei Startpunkt A sei wieder $E_{pot} = 0$) für die Arbeit, die dabei vom Kraftfeld verrichtet wird :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\,\vec{s} = \underbrace{E_{pot}(A)}_{=0} - E_{pot}(B)$$

$$= -E_{pot}(B)$$

Energieerhaltung

Energieerhaltungssatz der Mechanik:
Ein Körper bewegt sich in einem konservativen Kraftfeld von A nach B:
Durch die Kraft (einzige wirkende Kraft ist gleich res. Kraft!) wird Körper beschleunigt ($\vec{F} = m\vec{a}$) und seine kin. Energie ändert sich:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = E_{kin_B} - E_{kin_A}$$

Da Körper sich im Kraftfeld bewegt, ändert sich auch seine potentielle Energie! Es ist …

$$E_{pot_A} - E_{pot_B} = \int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

$$E_{pot_A} - E_{pot_B} = E_{kin_B} - E_{kin_A}$$

$$\boxed{E_{pot_A} + E_{kin_A} = E_{pot_B} + E_{kin_B}} \qquad \text{[Gl.1.3.23.]}$$

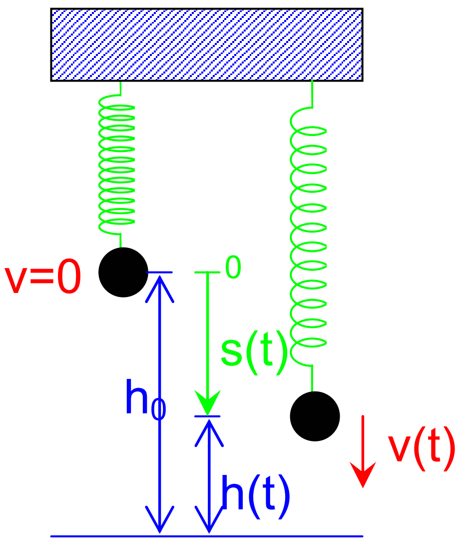
Erhaltung der mech. Energie: Die Summe aus kin. und pot. Energie ändert sich nicht!

Dieser Erhaltungssatz „steckt bereits in den Newton-Gesetzen drin" (wie auch Impuls-Erh.), da z.B. die kin. Energie aus Newton-Ges. abgeleitet wurde! E-Erhaltung vereinfacht aber viele Aufg./Rechnungen !.

Beispiel 1: Masse schwingt an Feder …

… wird mit $v = 0$ in Höhe h_0 (entspr. ungesp. Feder, $s = 0$!) losgelassen

- Körper bewegt sich ⇨ $v(t) \neq 0$ ⇨ kin. Energie
- Feder wird gespannt ⇨ Spannungsenergie
- Höhe ändert sich ⇨ Lageenergie ändert sich



	Anfangswert bei $t = 0$	Energie (als Fkt. der Zeit t)
kin. Energie	0	$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m \cdot v(t)^2$
Spannungs-energie	0	$E_{sp}(t) = \frac{1}{2} c \cdot s(t)^2$
Lageenergie	mgh_0	$E_{Lage}(t) = m \cdot g \cdot h(t)$
Gesamt-energie	mgh_0	$E_{kin}(t) + E_{sp}(t) + E_{Lage}(t)$

„Newton II" :

$$
\begin{aligned}
F_{res} &= m \cdot a \\
m \cdot g - c \cdot s &= m \cdot a \\
\int mg\,\mathrm{d}s - \int cs\,\mathrm{d}s &= \underbrace{\int ma\,\mathrm{d}s}_{\Downarrow} \\
mgs - \tfrac{1}{2} cs^2 &= \tfrac{1}{2} mv^2
\end{aligned}
$$

mit $s(t) = h_0 - h(t)$:

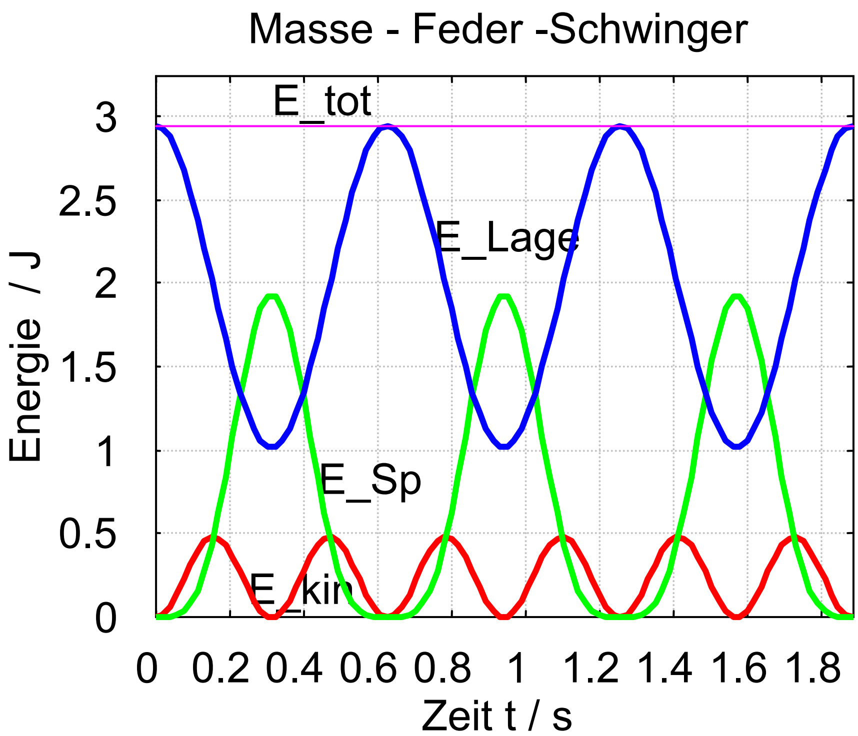
$$mgh_0 - mgh(t) - \tfrac{1}{2}cs(t)^2 = \tfrac{1}{2}mv(t)^2$$

$$mgh_0 = \tfrac{1}{2}mv(t)^2 + mgh(t) + \tfrac{1}{2}cs(t)^2$$

m.a.W.: 3 zeitabh. Größen, **Summe** ergibt **konst**. Wert mgh_0 !

$$\boxed{E_{kin}(t) + E_{Lage}(t) + E_{Sp.}(t) = E_{tot} = const. \;!} \qquad [Gl.1.3.24.]$$

Zahlenbsp.: c = 100 N/m , m = 1 kg , h_0 = 0.3 m
$E_{tot} = m\,g\,h_0$ = 2.94 J (siehe auch HO_ENERG.PLT !)



Bsp. 2: Energie beim senkrechten Wurf

Körper wird mit Anfangsgeschw. v_0 nach oben geworfen …

	Anfangswert bei $t = 0$	Energie (als Fkt. der Zeit t)
kin. Energie	$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2$	$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m \cdot v(t)^2$
Lageenergie	0	$E_{Lage}(t) = m \cdot g \cdot h(t)$
Gesamtenergie	$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2$	$E_{kin}(t) + E_{Lage}(t)$

„Newton II“ :

$$F_{res} = m \cdot a$$

$$-m \cdot g = m \cdot a$$

$$-\int mg\,\mathrm{d}h = \underbrace{\int ma\,\mathrm{d}h}_{\Downarrow}$$

$$-mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgh(t)$

m.a.W.:2 zeitabh. Größen, **<u>Summe</u>** ergibt **<u>konst</u>**. Wert $\frac{1}{2}m \cdot v_0^2$!

Beim senkr. Wurf kennen wir … $v(t) = v_0 - gt$, $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ ⇨ *also …*

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0t$$

$$E_{Lage}(t) = mg\left(v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \quad - \frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$

$$E_{tot} \quad = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + 0$$

$$\boxed{E_{kin}(t) + E_{Lage}(t) = E_{tot} = const. \;!} \qquad \text{[Gl.1.3.25.]}$$

<u>Zusammenfassung Energieerhaltung:</u>

- Gesamtenergie (kin. E. + Pot. E. + … + …) ist konstant !
- Energie kann <u>nicht</u> vernichtet und <u>nicht</u> erzeugt werden
  (vergl. dazu „<u>Entropie</u>“ - diese kann erzeugt aber <u>nicht</u> vernichtet werden - siehe Thermodyn./Entropie u. 2. Hauptsatz!)
- Es gibt kein Perpetuum Mobile (1. Art)
  („Perp. Mob. 2. Art“ siehe Thermodyn./Entropie u. 2. Hauptsatz!)

1.3.2.7 Leistung und Wirkungsgrad bei Energieumwandlungen

Leistung = „Arbeit / Zeit“ (Einh. 1 J/s = 1 W):

- mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{W}{t}$ [Gl.1.3.26.]
- momentane Leistung: $P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, $W = \int P(t)\,\mathrm{d}t$ [Gl.1.3.27.]

Bewegung eines Körpers mit Geschwindigkeit v:

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \text{[Gl.1.3.28.]}$$

Energieumwandlungen:
Gesamteenergie (bzw. Leistung) wird nur zum Teil in <u>Nutz-Energie </u> (bzw. Leistung) umgewandelt (Rest z.B. in Abwärme …)

<u>Wirkungsgrad</u> falls …

- Leistung <u>sofort</u> umgew. wird: $\eta_P = \frac{P_N(t)}{P_{ges}(t)} = \frac{\text{Nutzleistung}}{\text{Gesamtleistung}}$ [Gl.1.3.29.]
- Energie für einige Zeit zwischengespeichert wird: $\eta_W = \frac{W_N}{W_{ges}} = \frac{\int P_N\,\mathrm{d}t}{\int P_{ges}\,\mathrm{d}t}$ [Gl.1.3.30.]

1.3.3 Stoßgesetze

Anwendung des Impuls- und Energiesatzes auf Stoßprozesse

- Stoßprozesse: (zwei) Körper wechselwirken kurzzeitig miteinander.
- Kraft zwischen ① und ② wirkt für kurze Zeit Δt

  $\Rightarrow$ Impulsaustausch $\Delta\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\,t$

  $\Rightarrow$ Energieaustausch

Nicht nur „Stoß“ bei Berührung (elast. Kräfte an Grenzflächen), auch elektrostatische Kräfte, Gravitation u.a. bewirken („berührungslos“) einen Impuls- und Energieaustausch ⇨ STOSS !

Bsp.: 2 Billardkugeln, α-Teilchen und Atomkern, Tennisball u. Schläger, Raumsonde u. Planet, 2 Atom in einem Gas, …

Aufteilung:

- Elastischer Stoß: **Kin. Energie** bleibt **konstant** :

  $$\left\{E_{kin_1}(\text{nach}) + E_{kin_2}(\text{nach})\right\} - \left\{E_{kin_1}(\text{vor}) + E_{kin_2}(\text{vor})\right\} = 0 \qquad \text{[Gl.1.3.31.]}$$

- Inelastischer Stoß Kin. Energie wird in andere Energieformen umgewandelt :

  $$\left\{E_{kin_1}(\text{nach}) + E_{kin_2}(\text{nach})\right\} - \left\{E_{kin_1}(\text{vor}) + E_{kin_2}(\text{vor})\right\} = Q \quad , \quad (Q < 0)$$

  („endoenergetische Reaktion“)
  (Anm.: $Q > 0$ ⇔ „exoenergetisch“)

1.3.3.1 Elastischer Stoß

Bezeichnungen:

M.	Geschw., Impuls vor Stoß	Geschw., Impuls nach Stoß
m_1	$\vec{v}_1$, $\vec{p}_1$	$\vec{u}_1$, $\vec{p}_1'$
m_2	$\vec{v}_2$, $\vec{p}_2$	$\vec{u}_2$, $\vec{p}_2'$

Impulssatz: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \qquad (1)$$

Energiesatz:

$$\tfrac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2 \qquad (2)$$

Können mit (1) u. (2) aus den Geschw. vor Stoß $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ die Geschw. nach dem Stoß $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ berechnet werden?

Anzahl der Unbekannten :	…
Anzahl der Gleichungen	…
Gleichungssystem ist … eind. lösbar nicht eind. lösbar	☐ ☐

Begründung: Wie sieht der elast. Stoß im Schwerpunktsystem aus? Benutzen Sie den Impulssatz! Kann der Energiesatz eine Aussage über die Richtung der Geschwindigkeiten im SPS machen ?

Nur im <u>Spezialfall</u> des <u>geraden, zentralen elastischen Stoßes</u> genügen (1) u. (2) allein, um (u_1, u_2) zu berechnen.

1-dim., Schreibweise: u_1 etc. (ohne Vektorpfeil) für entspr. Vektor-Komponente (z.B. x-Richtung), vorzeichenbehaftete Größen!

aus (1): $m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2)$ (1')

aus (2) $\frac{1}{2} m_1(v_1^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} m_2(u_2^2 - v_2^2)$ (2')

Binomialformel bei (2') anw., (1') einsetzen ⇨ lin. Gl., auflösen nach (u_1, u_2) …

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

[Gl.1.3.32.]

Frage : Wie können Sie ohne Rechnung aus der 1. die 2. Formel erhalten?

Sonderfälle:

1. Gleiche Masse: für $m_1 = m_2$ ergibt sich …

$u_1 =$
$u_2 =$

2. Leichter Körper gegen ruhenden sehr schweren (Ball ➔ Wand)
für $m_1 << m_2$ und $v_2 = 0$ ergibt sich …

$$u_1 = \underbrace{\frac{\cancel{m_1} - m_2}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_1 + 0 \approx \quad \dots$$

$$u_2 = \underbrace{\frac{2m_1}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_1 + 0 \approx \quad \dots$$

3. Leichter Körper gegen bewegten sehr schweren
(Tischtennisball ➔ Schläger, Auto , Raumsonde ➔ Planet , etc.)
für $m_1 << m_2$ und $v_2 \neq 0$ ergibt sich …

$$u_1 = \underbrace{\frac{\cancel{m_1} - m_2}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_1 + \underbrace{\frac{2m_2}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_2 \approx \quad \dots$$

$$u_2 = \underbrace{\frac{2m_1}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_1 + \underbrace{\frac{m_2 - \cancel{m_1}}{\cancel{m_1} + m_2}}_{\approx \dots} \cdot v_2 \approx \quad \dots$$

Das Ergebnis läßt sich leicht verstehen, wenn man sich in das Bezugssystem des bewegten Körpers mit der großen Masse (m_2) versetzt.

Bsp.: Ein Ball fliegt mit 100 km/h einem LKW entgegen, der sich ebenfalls mit 100 km/h bewegt. Es ist also $v_1 = -100 \text{ km / h}$, $v_2 = +100 \text{ km / h}$.

Der Stoß sei elastisch.

Mit welcher Geschw. sieht der LKW-Fahrer …	
a) den Ball auf sich zukommen?	… km/h
b) den Ball nach dem Stoß wieder wegfliegen?	… km/h
Welche Geschw. hat der Ball also für einen ruhenden Beobachter?	… km/h

1.3.3.2 Inelastischer Stoß

Beim inelast. Stoß ergibt sich auch im 1-dim. Fall (gerader, zentraler Stoß) eine weitere Unbekannte, die (in Wärme oder andere Energieformen) umgewandelte Energie ΔW:

Impulssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Energiesatz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \Delta W$

Zusatzinform. zur Lsg., z.B. ΔW (absolut oder in %), eine Geschw. nach Stoß , …
Spezialfall: 2 Körper haben nach Stoß <u>gleiche</u> Geschw. (haften aneinander): $u_1 = u_2 = u$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u + m_2 u$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- Impulserh. genügt, um *u* zu berechnen!

ΔW : Betrachte den Vorgang <u>im **SPS**</u>, dort wird die gesamte <u>kinetische</u> Energie „vernichtet“!

Warum ? ....

Berechne die kin. Energie (vor Stoß!) nach „Methode Zweikörperproblem“ (s. dort!). Dann ist Bewegung der zwei Körper zu ersetzen durch Bew. eines einzigen Körpers mit <u>reduzierter Masse μ</u> und der <u>Relativgeschwindigkeit</u>, also : $\Delta W = \frac{1}{2} \mu \cdot (v_1 - v_2)^2$ mit $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

ΔW kann auch aus Energiesatz berechnet werden, wenn *u* aus Impulserh. bekannt ist …

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \tfrac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\cdot u^2\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\cdot\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2\left(v_1^2 + v_2^2\right) - \left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)^2}{m_1 + m_2} \\
&= \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2\left(v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2\right)}{m_1 + m_2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\left(v_1 - v_2\right)^2
\end{aligned} \qquad \text{[Gl.1.3.33.]}$$

Bsp.1: gleiche Masse *m*, Körper 2 ruht vor Stoß

Kin. Energie vor Stoß $E_{vor} = \frac{1}{2} m v_1^2$

Kin. Energie nach Stoß: $E_{nach} = \frac{1}{2}(2m)u^2 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = 50\%\cdot E_{vor}$

in Wärme umgew. $\Delta W = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\cdot(v_1)^2 = 50\%\cdot E_{vor}$

Bsp.2: Ballistische Pendel (Übungsaufg.!)

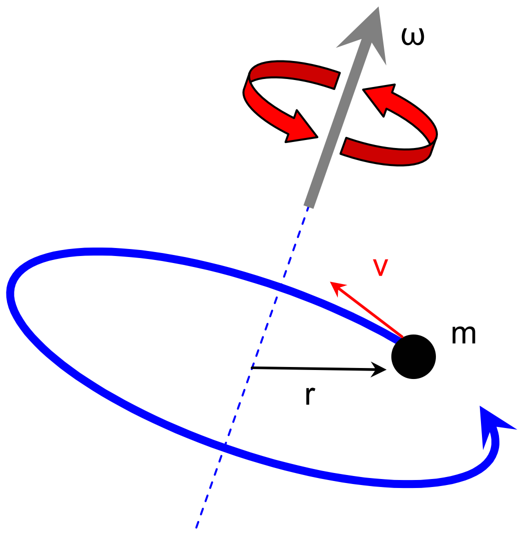
1.3.4 Drehimpulserhaltung

… zur Erinnerung : Kap. 1.2.3
„Dynamik der Drehbewegung“
Drehmoment

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$



Bsp.: Massenpunkt auf Kreisbahn:

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$= m|\vec{r}|^2 \cdot \vec{\omega}$ (da $\vec{r} \perp \vec{\omega}$!)

$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$ ⇨ Keine Drehimpulsänderung ohne Drehmoment!

$$\vec{M} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L} = const. \qquad \text{[Gl.1.3.34.]}$$

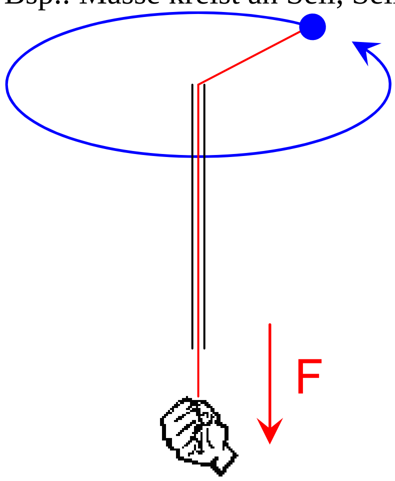
<u>a.) Zentralkraft</u>:

Ein Körper bewege sich (*beschleunigt*) unter dem Einfluß einer Kraft, die auf ein (festes) Zentrum (= Urspr. unseres Koordinatensystems) gerichtet ist (oder von diesem weg zeigt).
Bsp.:

- Masse(punkt) kreist an Seil
- Planeten/Satellitenbewegung
  (Gravitationskraft in Richtung auf Zentrum (Erde bzw. Sonne))
- Coulombkraft (elektrostat. Anziehung zw. Atomkern und Elektron, Abstoßung zwischen α-Teilchen und Atomkern)

Bei <u>Zentralkräften</u> ist wegen $\vec{r} \| \vec{F}$ bzw. $\vec{r} \uparrow\downarrow \vec{F}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, $\vec{L} = const.$
der <u>**Drehimpuls konstant**</u> („Flächensatz“, s. a. Kap. WW u. Felder/Grav./Kepler-Gesetze) !

Bsp.: Masse kreist an Seil, Seil wird verkürzt …



<u>Ausgangssituation</u>:

Radius r_0, Geschw. v_0,

Winkelgeschw. $\omega_0 = \frac{\dots}{\dots}$

kin. Energie : $E_{kin_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m r_0^2 \cdot \omega_0^2$

Drehimpuls: $L = r_0 \cdot m v_0 = m r_0^2 \cdot \omega_0$

Jetzt wird am Seil gezogen,
der <u>Radius verringert</u> auf $r < r_0$.
⇨ Geschw., Winkelgeschw., kin. Energie verändern sich!

➢ Kraft F ⇨ Arbeit wird verrichtet : $W = \int F \,\mathrm{d}s$

- Auch Kraft ist nicht konstant : $F = m \cdot \omega(r)^2 \cdot r$.
- Energiesatz: $E_{kin}(r) = E_{kin_0} + \int F \,\mathrm{d}s$ kann erst angewendet werden, wenn $\omega(r)$ bekannt ist !

ABER:

- Drehimpuls ist konstant (Zentralkraft!), $L = mr_0^2 \cdot \omega_0 = mr^2 \cdot \omega(r)$, ⇨ $\omega(r) = \frac{r_0^2}{r^2} \cdot \omega_0$

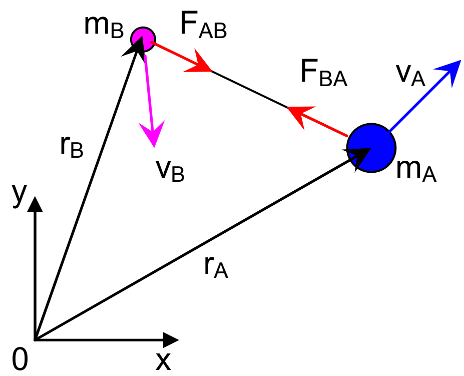
⇨ $v(r) = \ \ldots$, $E_{kin}(r) = \ \ldots$

Übungsaufgabe: Arbeit $W = \int F \,\mathrm{d}s$ berechnen (mit $\omega(r)$ wie oben!), Energieerh. überprüfen!

System aus mehreren Punktmassen, Kräfte zwischen diesen. Zunächst …

b.) 2 Körper

Keine äußeren Kräfte (genauer: Drehmomente!)



- Kraft auf A: F_{BA} ⇨ Moment $\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA}$
- Kraft auf B: F_{AB} ⇨ Moment $\vec{M}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB}$
- Geschwindigkeit, Impuls und Drehimpuls von A und B ändern sich!
- Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_A + \vec{L}_B$ bleibt aber konstant, denn …

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{tot}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_B}{\mathrm{d}t}$$
$$= \vec{M}_A + \vec{M}_B$$
$$= \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA} + \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB}$$
$$= \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}_{BA}\right)$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}_{BA} = \vec{0} \qquad \text{da } \vec{F}_{BA} \| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \ !$$

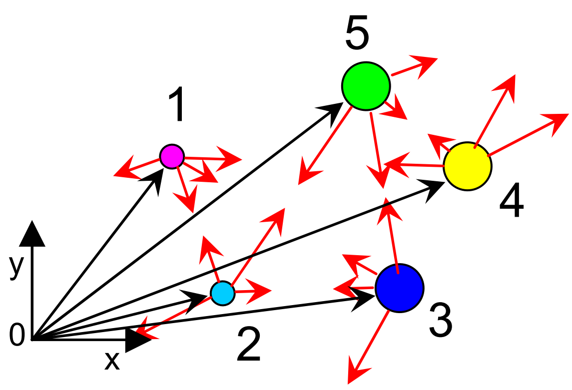
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{tot}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad , \quad \vec{L}_{tot} = const.} \qquad \text{[Gl.1.3.35.]}$$

c.) N Körper

Bei N Körpern und ausschließlich **inneren Kräften** / inneren Momenten gilt ebenfalls Erhaltung des Gesamtdrehimpulses:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{tot}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad , \quad \vec{L}_{tot} = const. \ .$$

Begr.: Drehmomente auf Grund innerer Kräfte ergeben paarweise Null (wie oben im Fall N=2 !)



Rechnung:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right)$$

$$= \ldots + \ldots \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \ldots + \ldots + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} + \ldots$$

$$= \ldots + \underbrace{\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ji}}_{=\vec{0}} + \ldots$$

$$= \vec{0}$$

Drehimpulserhaltung:

- In einem System aus Punktmassen, auf das keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls (-Vektor) $\vec{L}_{tot}$ erhalten.
- Nur ein (resultierendes) äußeres Drehmoment $\vec{M}_a$ bewirkt eine Änderung des Gesamtdrehimpulses gemäß $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{M}_a$

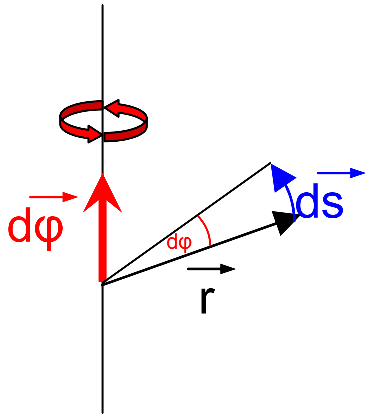
1.3.5 Arbeit bei Drehbewegungen, Rotationsenergie

Drehmoment wirkt auf Körper ⇨ bewegt diesen ⇨ verrichtet Arbeit !

Drehung um (infinitesimalen) Winkel $d\varphi$, beschrieben durch Vektor $d\vec{\varphi}$

(☞ Achtung: **nur** Drehungen um **infinitesimale Winkel** können als Vektor beschr. werden!)

(Richtung: Drehachse, Rechte-Hand-Regel!)



⇨ Bewegung um $d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ (*)

(Anm.: Nach (*) ist … $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$!)

⇨ Arbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{r}}_{\text{"Spatprodukt"}}$ [Gl.1.3.36.]

Regeln für Spatprodukt (➔ Mathe-🕮) … „zyklisch vertauschen"

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\vec{\varphi} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \underbrace{\left(\vec{r} \times \vec{F}\right)}_{=\vec{M}} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

$$\mathrm{d}W = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

$$W = \int \mathrm{d}W = \int \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi} \qquad \text{[Gl.1.3.37.]}$$

Bsp.1 : konst. Drehmoment: $\left|\vec{M}\right| = M = const.$, $\vec{M} \| \mathrm{d}\vec{\varphi}$

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot \mathrm{d}\varphi = M\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

Bsp. 2: Arbeit die Torsionsfeder verrichtet , $M = -c^*\varphi$

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -c^*\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2} c^* \left(\varphi_1^2 - \varphi_2^2\right)$$

Energie in Feder gespeichert !
Wird Körper zu Rot.-Bew. beschleunigt

⇨ **<u>kin. Energie der Rotation</u>**

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} \underbrace{m r^2}_{=J} \omega^2$$

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

Dabei ist J das Massenträgheitsmoment (hier: einer Punktmasse).

F o r t s . … V e r g l e i c h	
<u>Translation</u>	**<u>Rotation</u>**
Masse m	(Massen-)Trägheitsmoment J
Wegelement $\mathrm{d}\vec{s}$	Drehung um inf. Winkel $\mathrm{d}\vec{\varphi}$
Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	Arbeit $W = \int \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$
Transl.-Energie $E_{kin} = \tfrac{1}{2} m \cdot \vec{v}^2 = \dfrac{\vec{p}^2}{2m}$	Rot.-Energie $E_{kin} = \tfrac{1}{2} J \vec{\omega}^2 = \dfrac{\vec{L}^2}{2J}$
Leistung $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$