1.2 Dynamik

Ursache
von Bewegungen
(bzw. Bew.-Änderungen)

Kräfte
wirken auf Körper mit Masse

Grundlagen:

- Symmetrie / Invarianzen
- Prinzip der kleinsten Wirkung
- Energie-, Impuls-, Drehimpulserhaltung

Newton:
exp. Beobachtungen

3 Gesetze („Axiome"):
(...nicht streng beweisbar!)

1.2.1 Newtonsche Gesetze

1. **Trägheitsgesetz**

   Ohne äußere Beeinflussung bleibt ein Körper im Zust. der Ruhe *oder* der gleichförmig geradlinigen Bewegung $(\vec{v} = const.)$

2. **Grundgesetz der Mechanik**

   Die zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ist gleich der **resultierenden Kraft** $\vec{F}_{res}$

   die auf den Körper wirkt $$\vec{F}_{res} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} \qquad \text{[Gl.1.2.1.]}$$

   für konstante Masse:

   $$\vec{F}_{res} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}\,t} = m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$$
   $$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \qquad \text{[Gl.1.2.2.]}$$

3. **Wechselwirkungsgesetz ("actio = reactio")**

   Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft $\vec{F}_{AB}$ so wirkt auch Körper B auf Körper A mit der Kraft $\vec{F}_{BA}$. Beide Kräfte haben den gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtungen: $$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad \text{[Gl.1.2.3.]}$$

Newton I

- Trägheit: Widerstand gegen Bewegungsänderung ☞ Masse
  - "träge" Masse ⇐ *hier!*
  - "schwere" Masse Exp.: beide gleich!
- Bewegungszustand (Betrag u. Richtung der Geschw.) ändert sich nur, wenn **KRAFT** wirkt
- Trägheitsgesetz (TG) (u. II./III. N.-Ges.) gilt nur in bestimmten Bezugssystemen …

TG gilt **nicht**	in beschleunigten Bezugssystemen	Auto in Kurve Anfahrender Bus, Aufzug etc.
TG gilt	in einem **"Inertialsystem"**	a.) "Fixsternhimmel" b.) gleichf. geradl. gegen a.) bewegt

- ♦ Ein Bezugssystem, in dem das TG gilt, heißt

  I N E R T I A L S Y S T E M
- ♦ Es existieren beliebig viele Inertialsysteme
- ♦ Diese bewegen sich gegeneinander und gegenüber dem Fixsternen gleichförmig u. geradlinig.
- ♦ Alle Inertialsysteme sind gleichwertig, es gibt keine "absolute Ruhe"

Newton II

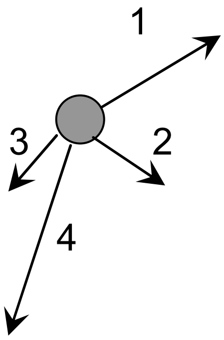
- res. **Kraft und Beschleunigung** sind einander proportional:

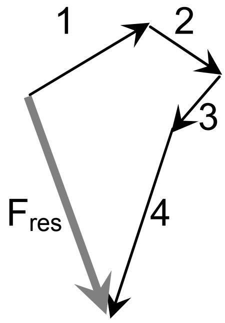
$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} \propto \vec{a} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a}\end{array}\right\}$$ Prop.-Konstante : (träge) **Masse**

- Kraftmessung:
  - a.) Def. eines Kraftstandards
    Vergleich mit Standard
    (2 Kräfte sind gleich, wenn sie den gleichen Körper gleich beschleunigen)
  - b.) prakt. Kraftmessung:
    Prinzip: elastische Verformung ⇒ mech./elektr./opt. Signal
    Bsp.: Federwaage, DMS, Piezo-Kristall,
    Vergleich (Regelkreis, Nullabgl.) mit bek. Kraft (z.B. El..-Magnet)

- **resultierende** Kraft
  ALLE Kräfte die auf Körper wirken **vektoriell** addieren!

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots \quad \text{[Gl.1.2.4.]}$$





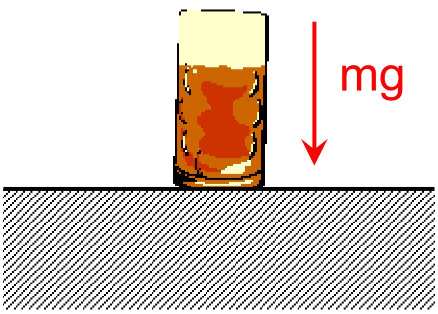
Anwendung des II. Newtonschen Gesetzes

- Beschleunigung bekannt
  ⇒ F_{res} berechnen
  mehrere Kräfte, <u>eine</u> davon <u>unbekannt</u>
  ⇒ unbekannte Kraft berechnen
- Kraft / Kräfte bekannt
  ⇒ Beschleunigung berechnen
  ⇒ innere Kräfte zwischen Teilen berechnen

1.	betrachte interessierenden Körper **isoliert**	⇦
2.	welche Kräfte wirken auf **diesen** Körper?	⇧
3.	$\vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_i$	⇧
4.	$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$	⇧
* ? * ?	* besteht das System aus weiteren Teilen? * verbleiben noch unbekannte Größen (innere Kräfte zwischen Teilen)	⇨

1.. 4
für andere (Teil-)
Körper wiederholen!

Beispiele für Anw. der Newton-Gesetze:
Bsp. 0.)
Warum bleibt der Körper "B." in Ruhe, obwohl auf ihn die Gewichtskraft m g wirkt? Welche anderen Kräfte wirken auf das B. ? Wie groß ist die resultierende Kraft?

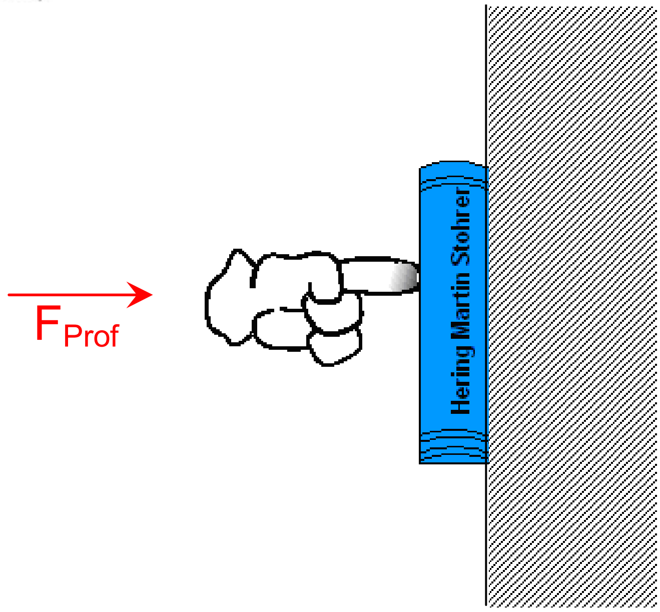


Bsp. 1.)
Warum bleibt das Buch in Ruhe, obwohl
auf das Buch die Kraft $\vec{F}_{\text{Prof}}$ wirkt?

Antw.: Es wirken insges 4 Kräfte auf das Buch ein (welche? warum? welche Richtung haben diese Kräfte?), die sich vetoriell zu Null addieren!

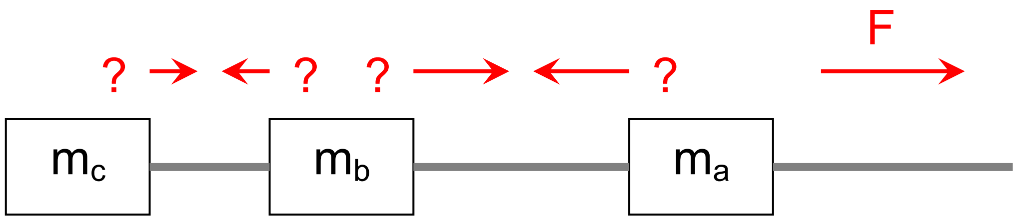
$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{\text{Prof}} + \ldots + \ldots + \ldots = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \text{ !}$$



Bsp. 2.)

3 Körper, mit Seilen/Stangen verbunden, an Körper a wird mit Kraft *F* gezogen.
Berechnen Sie die Beschleunigung *a* und die Seilkräfte!



Bezeichnen Sie die Kräfte in der Skizze! (F_1, $-F_1$ etc.)

Welche Kräfte wirken auf Körper a ? ________________

Körper b ? ________________

Körper c ? ________________

Newton II für ...

a) $\ldots\ldots\ldots = m_a \cdot a$

b) $\ldots\ldots\ldots = m_b \cdot a$

c) $\ldots\ldots\ldots = m_c \cdot a$

Summe: $\ldots\ldots\ldots = (m_a + m_b + m_c) \cdot a$

Daraus ergibt sich
die Beschleunigung a zu: $a =$ ....

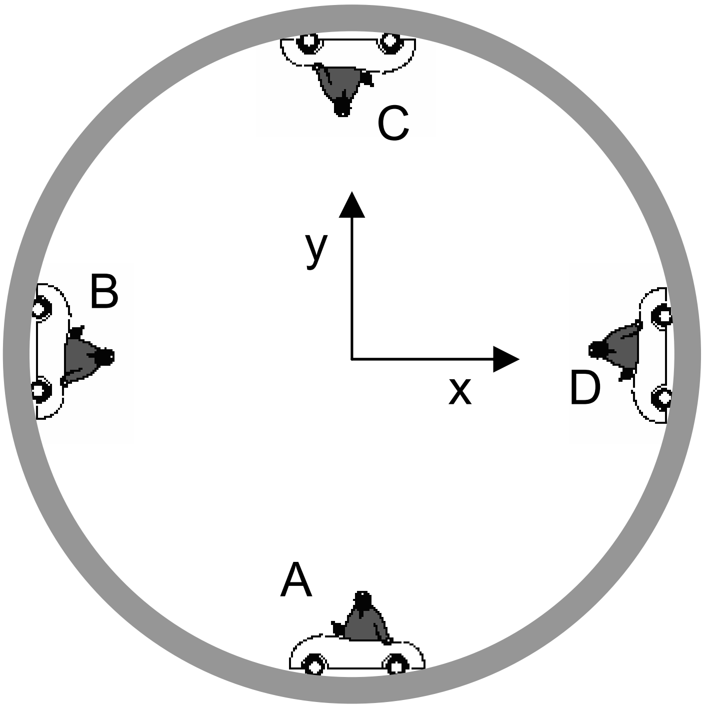
sowie die "inneren Kräfte" F_1 = ...

und F_2 = ...

Bsp. 3.)

Ein Fahrzeug durchfährt einen "Looping" (R = 20 m) mit konst. Geschwindigkeit
a.) $|\vec{v}| = 10 \text{ m/s}$ (b.) $|\vec{v}| = 20 \text{ m/s}$)

- Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungs-Vektor in den Positionen A, B, C u. D!
- Bestimmen Sie jeweils den Vektor der auf eine im Fahrzeug sitzende Person ($m_K = 150$ kg) wirkenden *resultierenden* Kraft $\vec{F}_{res}$!
- Welche einzelnen Kräfte wirken auf m_K? $\vec{F}_{res} = \ldots + \ldots$
  Bestimmen Sie jeweils den Kraft-Vektor (x-,y- Komp.) sowie den Betrag der Kräfte!



1.2.2 Lösung der Bewegungsgleichung

Kraft gegeben ⇨ Bewegung gesucht

KRAFTGESETZ:

Kraft abhängig von Ort, Geschwindigkeit, Zeit, ...

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t, \ldots)$

Bewegung:

gesucht ist Fkt. $\vec{r} = \vec{r}(t)$

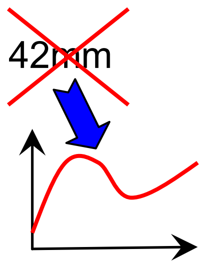
$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t, \ldots\right) \quad (*) \qquad \text{[Gl.1.2.5.]}$$

Grundgesetz der Mechanik: (Newton II $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$)

Bem. zu Gl (*):

- **Vektor**gleichung, statt drei Gl.(F_x, F_y, F_z) nur **eine** Gl.!
- "gesucht" , d.h. **Lösung der Gl.** ist nicht (nur) eine Zahl,

  sondern eine **Funktion** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$



- Die Gleichung enthält neben der gesuchten Funktion $\vec{r}(t)$ deren

  Ableitungen $\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ⇨

  D ifferential **G L** eichung (**DGl**)

Die "*Grundaufgabe*" der Dynamik des Massepunkts ist,

die DGl (*) zu lösen!

Die Lösung dieser DGl ist …

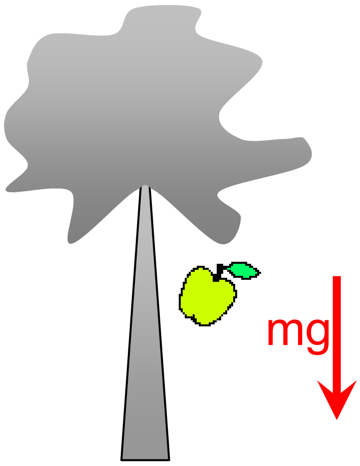
- **sehr einfach**

  $\vec{F} = const.$, z.B. $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$

$$\cancel{m}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\cancel{m}\cdot\vec{g}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{g}t+\vec{v}_0$$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}=\tfrac{1}{2}\vec{g}t^2+\vec{v}_0t+\vec{r}_0$$



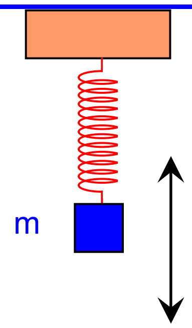
☞ Lsg. der DGl. ist nicht eindeutig (⇒ **Integrationskonstanten!**); aus der Menge der mathematisch möglichen Lösungen muß die herausgefischt werden, die bestimmte Anfangsbedingungen erfüllt!

oder …

- **einfach**

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-c\cdot x$$

$$\Rightarrow x(t)=a\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)$$

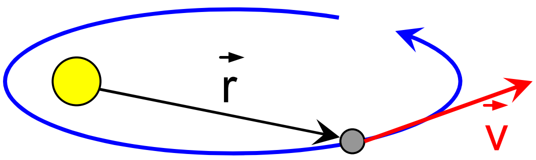


oder aber …

- nicht ganz so **einfach**

Gravitation: $\vec{F}(\vec{r})=-\gamma\,\frac{m_1m_2}{|\vec{r}|^2}\vec{e}_r$

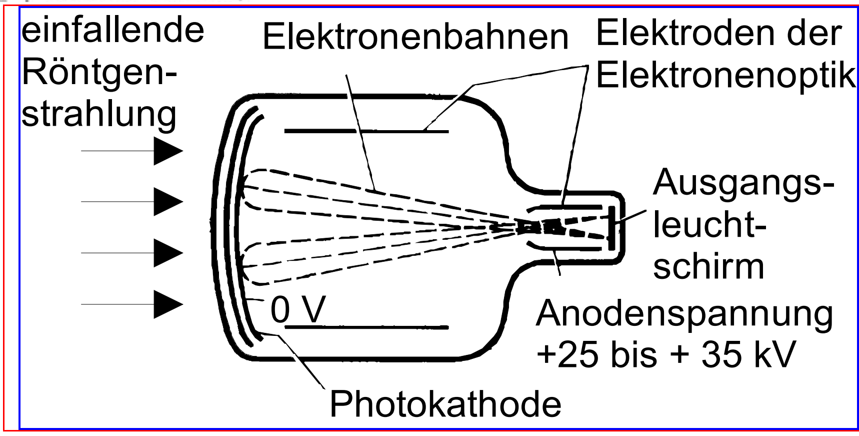
⇒ Satelliten-/ Planetenbahnen
(Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel)



jedoch in manchen Fällen …

- wirklich so ganz **einfach** nun doch wieder nicht …- wenn man als Hilfsmittel nur **B**leistift/ **P**apier/ **P**apula zur Verfügung hat -

Bsp.: Röntgenbildverst., Bahn der Elektronen im **inhomogenen elektr. Feld ⇒numerisch berechnet!**



Weitere Beispiele / Übungsaufg., bei denen sich DGl ergeben, die noch „zu Fuß“ lösbar sind :

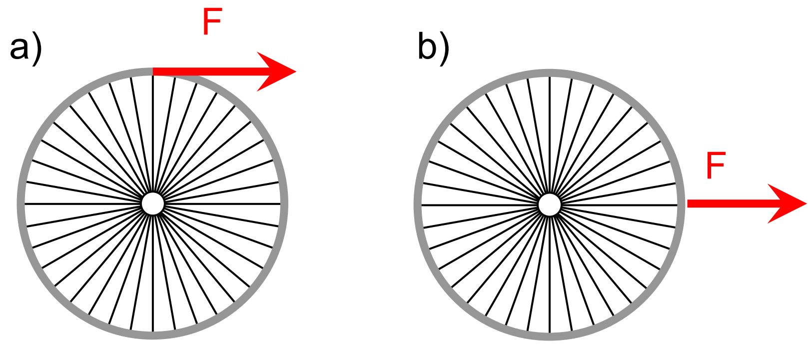
- alle Arten von harm. Oszillatoren (Pendel, U-Rohr, Masse + x-Federn, … ; siehe auch Kap. Schwingungen und Wellen!)
- Seil, Papierblatt o.ä, rutscht vom Tisch
- Körper wird durch viskose Reibung gebremst (Reibungskraft prop. zu *v*)

…

1.2.3. Dynamik der Drehbewegung

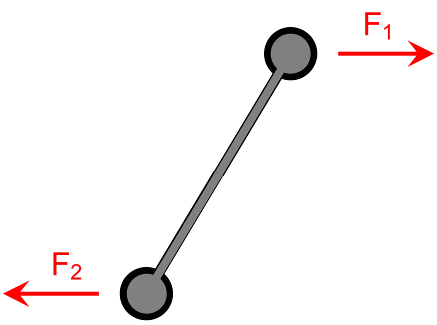
Kraft wirkt auf „drehbaren“ Körper

- warum kommt es auf den Angriffspunkt der Kraft an ?
- wann fängt der Körper an, sich zu drehen , wann nicht?



- Wenn eine Kraft F auf Körper wirkt, der Körper sich aber nicht „bewegt“, so muß nach Newton II noch (mindestens) eine weitere Kraft wirken, so daß $\vec{F}_{res} = \vec{0}$! Welche Kraft ist das ? ....

Kräftepaar:
Es sei $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, trotzdem „bewirken“ die Kräfte etwas der Körper dreht sich!



- Bei ausgedehnten (nicht punktförmigen!) Körpern kommt es auf den Punkt an, an dem eine Kraft angreift.
- Grundgesetz der Dynamk (N. II) war … $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t}$

  (spez. falls $m = const.$ ⇨ $\vec{F} = m\vec{a}$) …

- Brauchen für Drehbew. Größen, die Kraft bzw. „Bewegungsgröße“ (Impuls) entsprechen, aber den Angriffspunkt berücksichtigen …
- Eine Vektorgröße, die Kraft und Angriffspunkt zusammenfaßt ist das …

$$\boxed{\textbf{Drehmoment}\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad \text{[Gl.1.2.6.]}$$

⇨ Mathe-Formelsammlung ⇨ Regeln für Vektorpr.
⇨ $\vec{M} \perp \vec{r}$, $\vec{M} \perp \vec{F}$, (wenn $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$)

- Analog wird eine (Dreh-) Bewegungsgröße definiert :

$$\boxed{\textbf{Drehimpuls} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad \text{[Gl.1.2.7.]}$$

Bem.: *Beide Definitionen enthalten den Ortsvektor $\vec{r}$. Drehmoment u. Drehimpuls sind damit abhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Meistens ist es sinnvoll, den Ursprung auf die Drehachse zu legen!*

Bsp. – „Punkt" mit festem Abstd. v. Drehachse auf Kreisbahn:

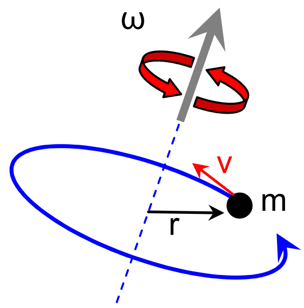
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$= m|\vec{r}|^2 \cdot \vec{\omega}$ (da $\vec{r} \perp \vec{\omega}$!)

$\vec{L}$ ist also wie $\vec{\omega}$ ein Vektor; Richtung (hier!): Drehachse !

$\vec{L} = \underbrace{mR^2}_{J} \cdot \vec{\omega}$, J ist das **<u>Trägheitsmoment</u>.**



Für eine <u>Punktmasse</u>, die sich im Abstand R von der Drehachse bewegt, gilt:

$$J = mR^2 \qquad \text{[Gl.1.2.8.]}$$

➢ Bei <u>ausgedehnten</u> Körpern ist die Berechnung von $J = \ldots$ etwas komplizierter, es muß über das Volumen den Körpers integriert werden (→ starrer Körper)!

¿ Ändert sich der Drehimpuls mit der Zeit ? $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\vec{r} \times \vec{p})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times m\vec{v} \atop =\vec{0}} + \vec{r} \times \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{F}} = \vec{M}$

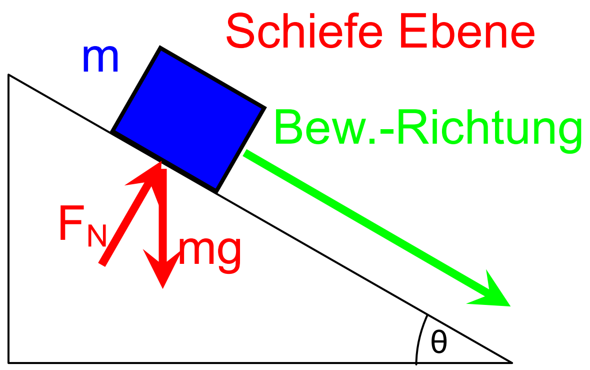
⇨ Ja, wenn ein Drehmoment wirkt ! $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$ [Gl.1.2.9.]

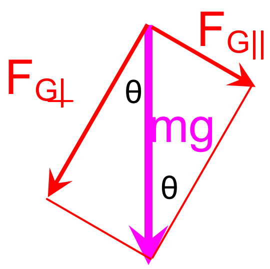
Mit $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ ergibt sich $\dfrac{\mathrm{d}(J \cdot \vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$. Wenn J konstant ist : $J\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$ bzw. $\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$

V e r g l e i c h	
<u>Translation</u>	**<u>Rotation</u>**
Ortsvektor $\vec{r}$	Winkel φ
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschw. $\omega = \dot{\varphi}$ $(\vec{\omega} \parallel$ Drehachse!$)$
Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschleunig. $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ $(\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}})$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Masse m	(Massen-)Trägheitsmoment J (Massenpkt. ⇨ $J = mR^2$)
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ $(\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ falls m konst.!)	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ $(\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$ falls J konst. !)

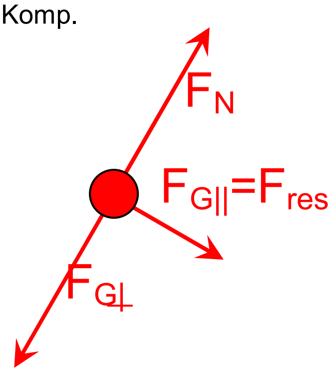
1.2.4 Anwendungsbsp. der Newton-Gesetze

1.2.4.1 ⇨





Auf den Körper wirken 2 Kräfte:
1. Gewichtskraft mg
2. Normalkraft der „Unterlage“
   (senkr. auf Ebene – keine Reibung!)
   → Gewichtskraft aufspalten in
   long./transv. Komp.



trans. Komp. wird durch F_N kompensiert

resultierende Kraft = $F_{G||}$

$F_{G||}=F_{res}=mg\sin\theta$

$\boxed{a = g\sin\theta}$

1.2.4.2 Kräfte in Seilen,
Treibriemen, Ketten etc.

a.) **Seil mit Masse:**

$$F_{res} = F_1 - F_2 = ma$$

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m}$$

[Gl.1.2.10.]

(beachte Vorzeichenwahl!)

$$F_1 > F_2 \Rightarrow a > 0 \quad (\rightarrow)$$

$$F_1 < F_2 \Rightarrow a < 0 \quad (\leftarrow)$$

b.) **"masseloses"Seil** *(Masse des Seils vernachlässigbar gegen "Last")*

$$F_{res} = F_1 - F_2 = 0 \cdot a = 0\,!$$

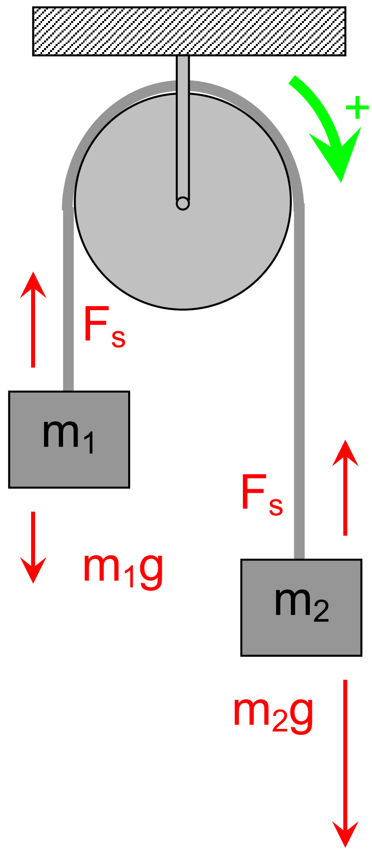
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_1 = F_2}}\,!$$

[Gl.1.2.11.]

Kraft im "masselosen" Seil ist an beiden Enden gleich! (= „Seilkraft“, „Zugkraft“ : F_S, T)

c.) Seile und Rollen

(Masse v. Seil u. Rolle vern.!)



N. II:

① $F_{1_{res}} = F_s - m_1 g = m_1 a$

② $F_{2_{res}} = m_2 g - F_s = m_2 a$

Warum ist a beidesmal gleich ? Was ändert sich, wenn "lose Rollen" mit ins Spiel kommen?

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

a einsetzen in ①:

$$F_s = m_1(a + g) = m_1\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1\right) \cdot g$$

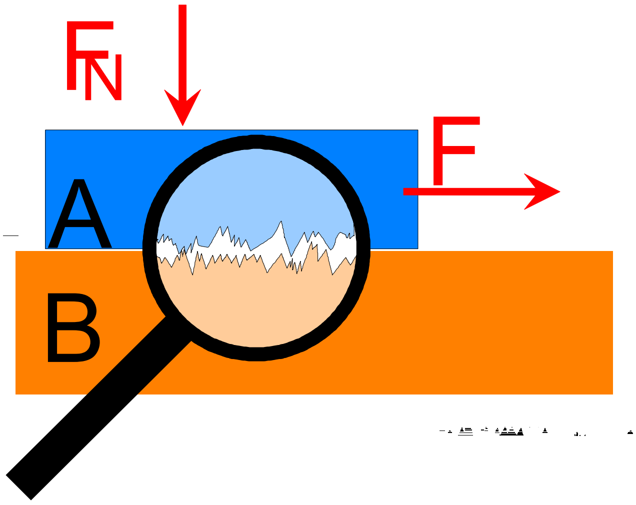
$$= 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

[Gl.1.2.12.]

1.2.4.3 Reibungskräfte

a.) äußere Reibung

- Reibung an der Grenzfläche zw. 2 Körpern A u. B
- abhängig von …
  - Materialien A u. B
  - Oberflächenbeschaffenheit (trocken, feucht, geölt, poliert, aufgerauht …
  - Normalkraft F_N
- **un**abhängig von der Fläche ! (warum ?)



Bemerkung:

Das (anschauliche) Bild einer rauhen Oberfläche sollte nicht so interpretiert werden, daß die Reibungskraft allein dadurch zustande kommt, daß „Höhenunterschiede" überwunden werden müssen. Vielmehr spielen elektrische Kräfte zwischen den Atomen an der Oberfläche (chem. Bindungskräfte) eine viel größere Rolle bei der Entstehung der Reibungskräfte!

2 Spezialfälle:

I Kraft F auf A kleiner als Grenzwert, Körper A beweget sich <u>nicht,</u> Kraft F und Reibungskraft F_R kompensieren sich,

$\Rightarrow$ A u. B **<u>haften</u>** aneinander bis F ein Maximum überschreitet:

Haftreibung $\left|\vec{F}_R\right| = \mu_H \cdot \left|\vec{F}_N\right|$ [Gl.1.2.13.]

II Körper **<u>gleiten</u>**:

Gleitreibung $\left|\vec{F}_R\right| = \mu_G \cdot \left|\vec{F}_N\right|$ [Gl.1.2.14.]

Warum stehen hier "Betragsstriche" ?

$\vec{F}_N$: Normalkraft, z.B.

Gewicht des Körpers A: $\left|\vec{F}_N\right| = m_A g$

schiefe Ebene: $\left|\vec{F}_N\right| = m_A g \cdot \cos\theta$

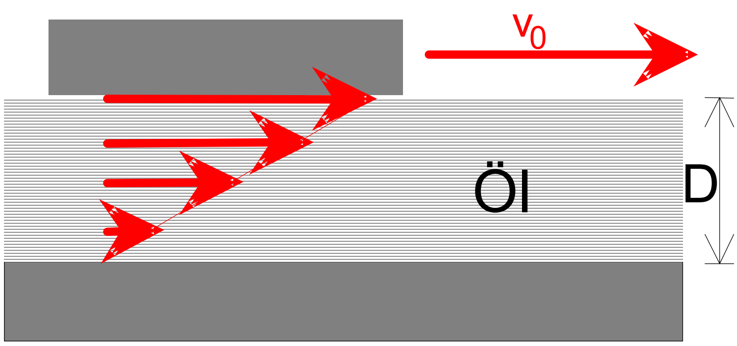
- bei **<u>äußerer Reibung</u>**: Reibungskraft F_R *(näherungsweise)* **<u>un</u>**abhängig von der Geschwindigkeit, F_R *(allein oder zusammen mit anderen konstanten Kräften)* $\Rightarrow$ gleichf. beschleunigte Bewegung!
- $\mu_G < \mu_H$!

Stoffpaar	μ_H Haft- Reibungszahl	μ_G Gleit- Reibungszahl
Stahl - Stahl	0.15	0.03 .. 0.12
Stahl - Holz	0.5 .. 0.6	0.2 .. 0.5
Gummi-Asphalt	0.65	0.50
Gummi - Eis	0.20	0.15

b.) innere Reibung

- Reibung bei Verformung im Innern eines (festen, flüssigen oder gasförmigen) Körpers!
- geschwindigkeitsabhängig, $(v = 0 \Rightarrow F_R = 0)$,

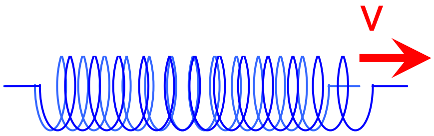
$\Rightarrow$ i. allg. <u>keine</u> gleichf. beschleunigte Bewegung!!!



$F_R \propto v_0$

$$F_R = \underbrace{\eta}_{Viskosität} \cdot A \cdot \frac{v_0}{D}$$ (*A*: Fläche der Platte) [Gl.1.2.15.]

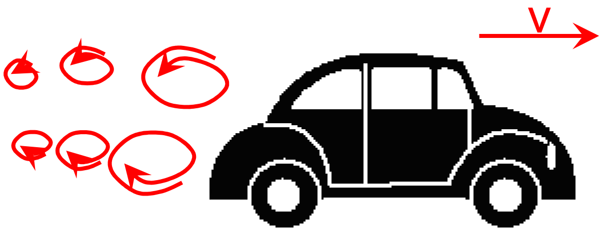
Innere Reibung in Festkörpern Bsp. Feder:



- statisch: $F_{el} = -c \cdot s$
- bei Bewegung: $\Rightarrow$Draht wird gebogen $\Rightarrow$ zusätzliche Reibungskraft (innere Reibung im Draht)
  $F_R = -b \cdot v$ [Gl.1.2.16.]

Innere Reibung ⇨ abhängig von der Geschwindigkeit !
spez. „Newton'sche Reibung" : $F_R \propto v$

c.) turbulente Reibung in Strömungen



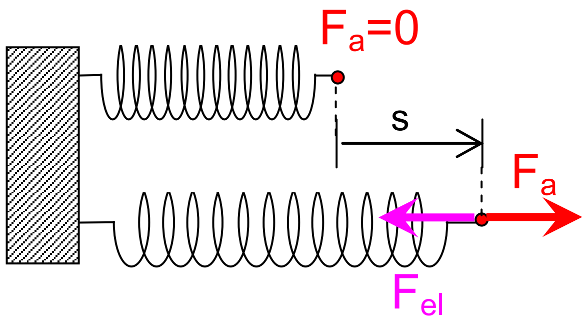
Strömung $\Rightarrow$ Wirbelbildung $\Rightarrow$ Reibungskraft $F_R \propto v^2$

$$F_R = \tfrac{1}{2} c_w \rho A \cdot v^2 \qquad \text{[Gl.1.2.17.]}$$

Realität:				
Mischung aus	**äußerer**,	**innerer** ,	**turbulenter**	Reibung!
	$F_R = const.$	$F_R \propto v$	$F_R \propto v^2$	

1.2.4.4 Federkräfte

elastische Kräfte



elastischer Bereich :

Kraft $\propto$ *Deformation*

("Hookesches Gesetz") $F \propto s$

elast. Kraft der Feder wirkt Auslenkung $\vec{s}$ entgegen:

$$\vec{F}_{el} = -c \cdot \vec{s} \qquad \text{[Gl.1.2.18.]}$$

c (oft auch: ***D***): "Federkonstante", "Richtgröße" , [*c*] = N/m

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_{el} \quad \Rightarrow \vec{F}_a = +c \cdot \vec{s} \qquad \text{[Gl.1.2.19.]}$$

Anw.: Kraft-, Druckmessung etc. (Federwaage)

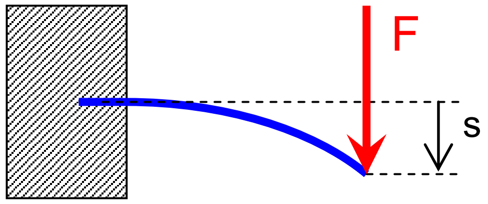
Lineares Kraftgesetz:

- Deformation …
- Längenänderung …
- Winkel …

$\propto$ Kraft (bzw. Drehmoment)

3 Beispiele für "lin. Kraftgesetz":

a.) Blattfeder $F \propto s$



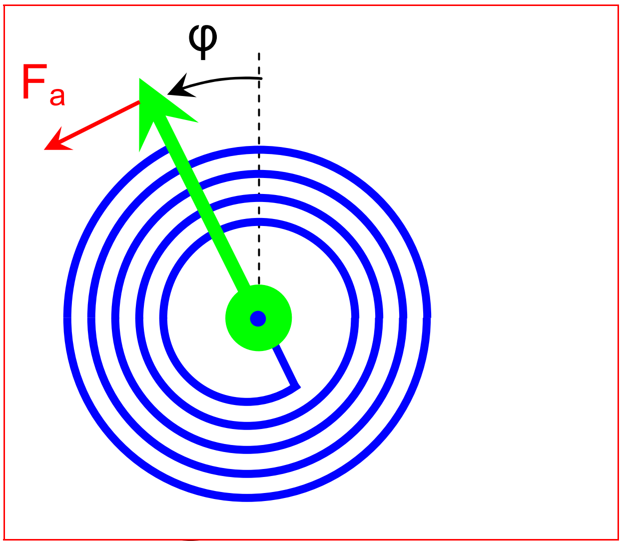
b.) "Schneckenfeder":

$F \propto \varphi$

bzw. mit Drehmoment: $M = F \cdot R$

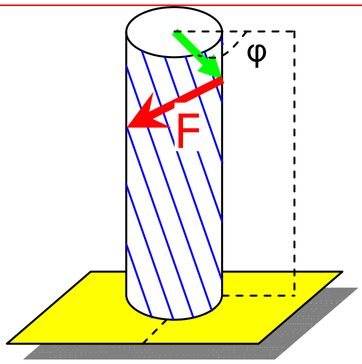
und "Winkelrichtgröße" c^*:

$$M = -c^* \cdot \varphi$$
$$F \cdot R = -c^* \cdot \varphi \qquad \text{[Gl.1.2.20.]}$$



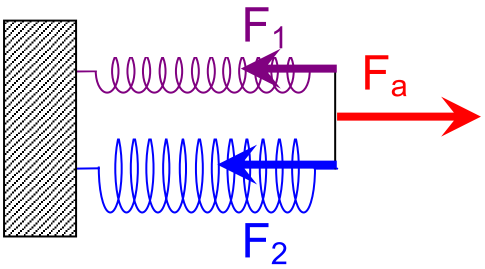
c.) Torsionsstab:

$$M = -c^* \cdot \varphi$$
$$F \cdot R = -c^* \cdot \varphi \qquad \text{[Gl.1.2.21.]}$$



Parallel- u. Serien-„Schaltung“ von Federn

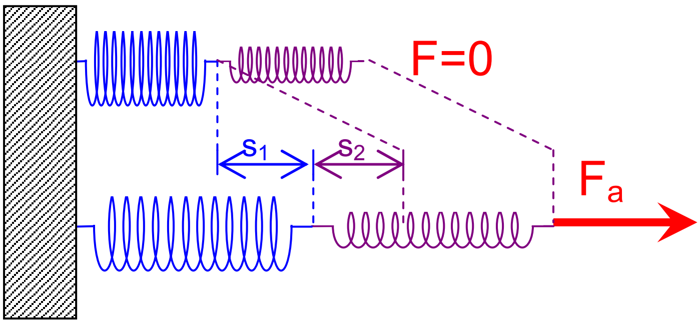
2 Federn parallel : **KRÄFTE addieren sich**



$$F = F_1 + F_2 = (-c_1 s) + (-c_2 s)$$
$$= -(c_1 + c_2)s$$
$$= -cs$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{c = c_1 + c_2}}$$

[Gl.1.2.22.]

2 Federn in Serie : **Federwege addieren sich**



$$s = s_1 + s_2 = \frac{-F}{c_1} + \frac{-F}{c_2} = -F\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$$
$$= \frac{-F}{c}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}}$$

[Gl.1.2.23.]

1.2.4.5 Dynamik des Masse-Feder-Systems:

Körper mit Trägheit (Masse) bewegt sich unter dem Einfluß einer Federkraft:
von "x" abhängige Kraft ⇒ keine konst. Beschleunigung
… sondern aus II. Newton-Gl. ergibt sich eine DGL (siehe Kap. 1.2.2 !)
Lösung : HARMONISCHE OSZILLATOR
(s. auch „Schwingungen und Wellen“!)