1. Mechanik

Wir teilen in der Vorlesung „Physik für Ingenieure“ die Mechanik auf in die Teilgebiete

- Mechanik des Massenpunkts
- Mechanik des starren Körpers (Kap. 1.4)
- Mechanik der Flüssigkeiten und Gase (Kap. 1.5)

Zunächst werden also hauptsächlich sogenannte „Massenpunkte“ oder „Punktmassen“ behandelt. Natürlich gibt es keine wirklich „punktförmigen“ Körper[1]. Ein Massenpunkt ist ein Modell, das vernünftige und aussagekräftige Ergebnisse liefert, wenn die Ausdehnung der Körper klein sind gegen die Abmessungen des Raumgebiets, in dem er sich bewegt. Für ein Elektron in einer Bildröhre trifft das zweifelsfrei zu. Aber auch die Erde kann als Massepunkt betrachtet werden, wenn man die Bahn der Erde um die Sonne betrachtet. Im Modell „Massenpunkt“ werden Drehungen des Körpers und alle „internen“ Bewegungen (innere Freiheitsgrade) nicht betrachtet. Behandeln wir ein Auto näherungsweise als Massenpunkt, so können wir durchaus Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Antriebskraft, Leistung etc. angeben bzw. berechnen (und für viele Zwecke reicht das aus). Ein reales Auto hat eine Ausdehnung, es kann sich um verschieden Achsen drehen, es gibt zahlreiche elastischen Komponenten, die sich bei Belastung verformen, es gibt intern Teile, die rotieren oder schwingen , … Für eine Fahrdynamik-Simulation reicht das Modell „Massenpunkt“ deshalb nicht aus. Hier werden kompliziertere Modelle mit vielen Freiheitsgraden verwendet, die Sie aber erst verstehen können, wenn Sie den „Massepunkt“ verstanden haben.

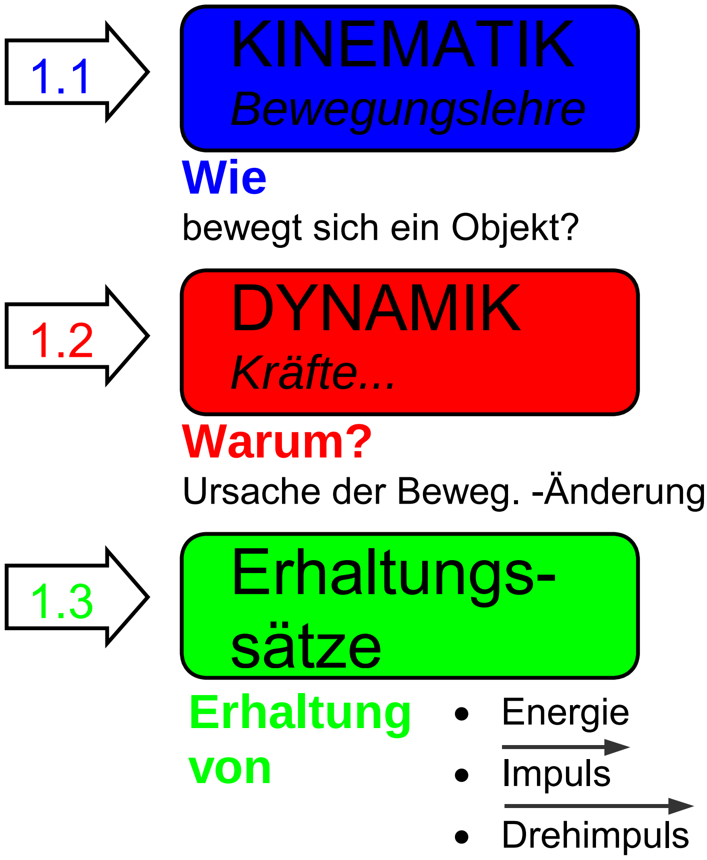
„Mechanik des Massenpunkts“

Wir unterteilen dieses Kapitel weiter in einen ersten Teil, in dem wir Bewegungen lediglich (mit mathematischen Modellen) beschreiben.

Anschließend fragen wir nach den Ursachen von Veränderungen des Bewegungszustands. Da reale Körper eine Masse haben und „träge“ sind, sind hierzu Kräfte nötig.

Im dritten Teil behandeln wir die für die Mechanik wichtigen „Erhaltungssätze“ Diese erlauben es, die Berechnung mechanischer Vorgänge dadurch zu vereinfachen, dass „Bilanzierungsgleichungen“ verwendet werden.

Wir werden in allen drei Teilen sowohl die **Translation** (geradlinige Bewegung) als auch die **Rotation** (Drehbewegung) behandeln.

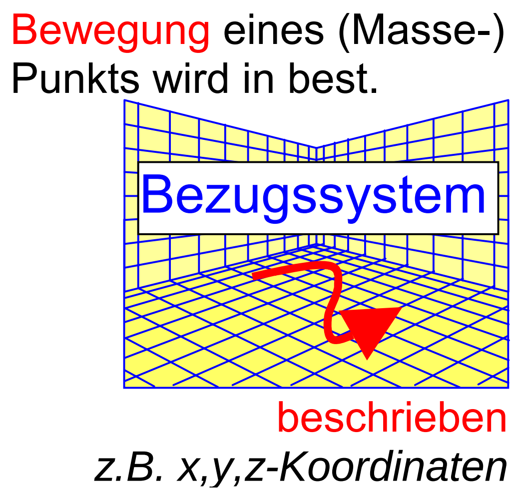


[1] Es gibt aber sehr, sehr kleine Elementarteilchen. Bei einigen davon (z.B. Elektronen und Quarks) konnte bisher keine Struktur und keine wirkliche Ausdehnung gemessen werden; sie benehmen sich also wie „punktförmige“ Objekte, obwohl das (aus Gründen die hier nicht näher erläutert werden) physikalisch eigentlich gar nicht möglich ist. Dieser scheinbare Widerspruchs kann erst in der Quantenphysik aufgelöst werden.

Zur Mechanik gehören natürlich auch noch die (wichtigen!) Kapitel Statik (Kräfte-/ Momentengleichgewicht) und die Elastizitätstheorie. Diese werden wir in der Physik aber nur am Rande besprechen, da sie in den Ingenieursstudiengängen i.d.R. im ersten Semester in Technische Mechanik ausführlichst behandelt werden.

1.1 Kinematik

Die Kinematik oder Bewegungslehre befasst sich mit der Beschreibung von Bewegungsvorgängen mit Hilfe von geeigneten Koordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen etc.

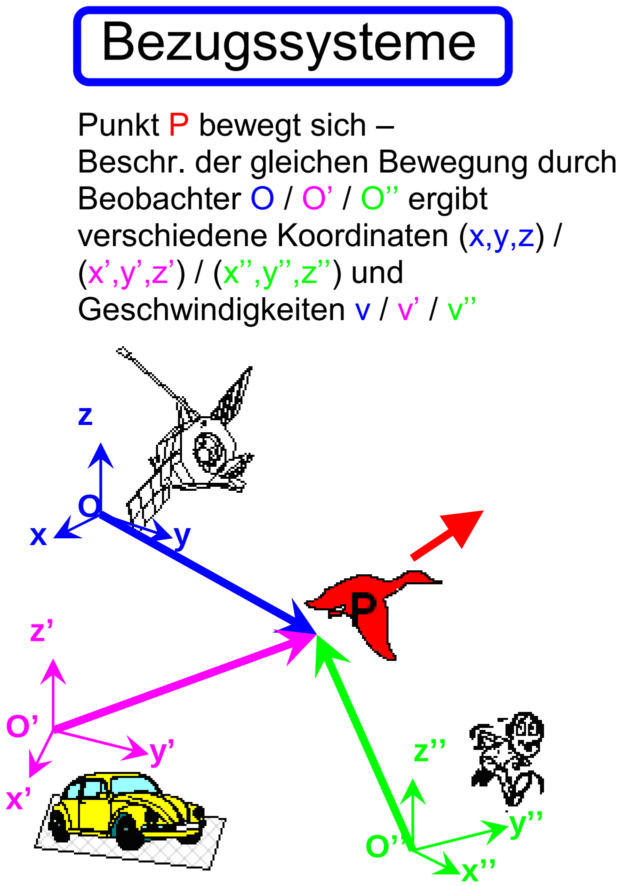


Bezugssysteme

Man muss sich darüber im Klaren sein, dass die Beschreibung einer Bewegung immer ein vorgegebenes Bezugssystem voraussetzt. Der gleiche Bewegungsvorgang kann in unterschiedlichen Bezugssystemen mit völlig anderen Zahlen für Ort, Geschwindigkeit etc. beschrieben werden

Beispiele:

- Sie werfen Ihrem Nachbarn im fahrenden Zug einen Apfel zu. Die Bewegung des Apfels kann Bezugssystemd es Zugs oder auch vom Bahndamm aus beschrieben werden.
- Die NASA schickt eine Raumsonde zum Mars. Die Bewegung der Raumsonde kann im Bezugssystem der Erde, der Sonne oder des Mars beschrieben werden. Für die verschiedenen Flugphasen wird man hier verschiedene System wählen: Der Start ist sicher im erdgebundenen System am einfachsten zu beschreiben; für den interplanetaren Flug wird man ein Bezugssystem wählen, in dem die Sonne im Ursprung des Koordinatensystems liegt; für den Landeanflug wird man am dagegen ein marsgebundenes System bevorzugen.
- Ein Roboter montiert z.B. eine Autoscheibe und bewegt sich dabei auf Schienen parallel zum Band neben dem Auto her. Die Bewegung des Greifarms kann hier entweder im Bezugssystem der Werkshalle oder im eigenen Koordinatensystem des Roboters beschrieben werden.

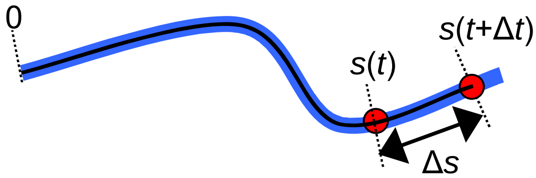


- Ein Schiff fährt auf einem Fluss. Seine Geschwindigkeit kann relativ zum Ufer oder relativ zum Wasser angegeben werden. Je nachdem, wie groß die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist, kann der Unterschied beträchtlich sein.

Wir werden später auf unterschiedliche Bezugssysteme (insbesondere auf das sogenannte „Schwerpunktsystem“) zurück kommen und auch die Umrechnung zwischen verschiedenen Bezugssystemen behandeln.

1.1.1 Geschwindigkeit

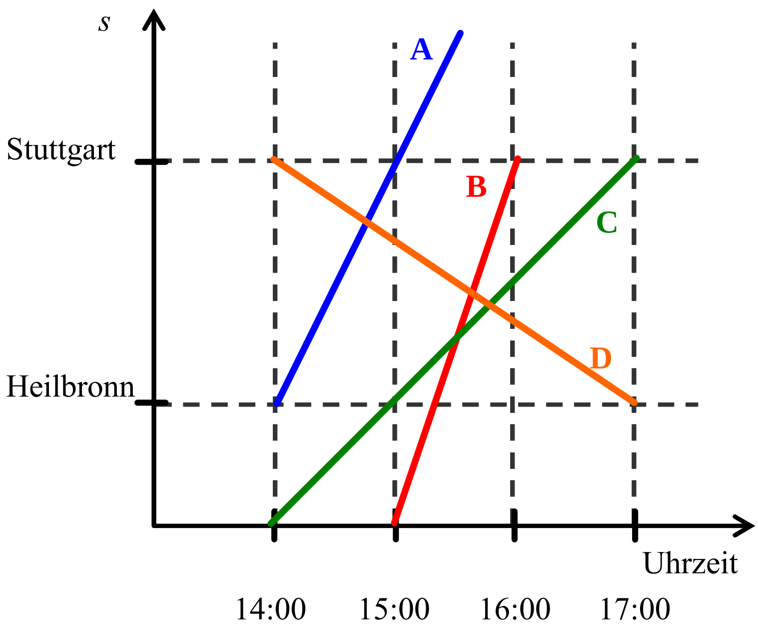
Wir beschränken uns zunächst auf die Beschreibung von **eindimensionalen** Bewegungen, d.h. solche Bewegungen, bei denen zu Angabe der Position eine einzige Zahl (mit Einheit!) genügt. Dies ist z.B. der Fall bei einer geradlinigen Bewegung oder bei einem Schienenfahrzeug, das sich zwar auf einer kurvigen Bahn bewegt, bei dem aber auch die Angabe des „Streckenkilometers“ ausreicht, um die Position anzugeben. Eine eindimensionale Bewegung lässt sich durch eine „**Weg-Zeit-Funktion**“ bzw. „Orts-Zeit-Funktion“ $s = s(t)$ beschreiben. Ist diese Funktion bekannt, so kann z.B. ein Computerprogramm erstellt werden, das für beliebige Zeitpunkte t die bis dahin zurückgelegte Wegstrecke s berechnet



$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\textbf{Weg}}{\textbf{Zeit}}$$

Die Weg-Zeit-Funktion“beschreibt die gesamte Bewegung. Als Diagramm dargestellt erhält man daraus einen „grafischen Fahrplan“. Aus der Weg-Zeit-Funktion ergibt sich auch die Geschwindigkeit und (bei beschleunigten Bewegungen) die Beschleunigung.

Der Begriff Geschwindigkeit ist Ihnen sicher bekannt. Schon allein aus den Einheiten (Kilometer/Stunde, Meilen/Stunde, Meter/Sekunde etc. ergibt sich, was mit Geschwindigkeit gemeint ist.



Wir behandeln zunächst den Spezialfall:

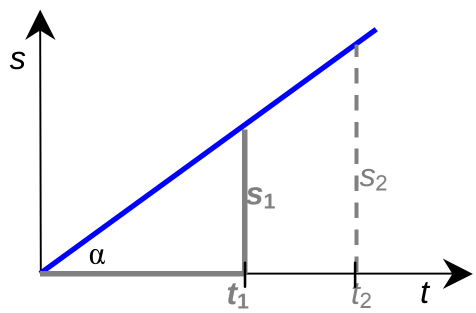
Konstante Geschwindigkeit

Bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit werden in gleichen Zeitintervallen immer die gleichen Wegstrecken zurückgelegt. Es gilt also:

gleiche Zeit ⇨ gleicher Weg

doppelte Zeit ⇨ doppelter Weg

…



Im Weg-Zeit-Diagramm erhält man eine Gerade. Anders ausgedrückt: Das Verhältnis von Weg : Zeit ist in diesem Fall immer gleich: $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_3}{t_3} = \ldots \quad = \text{const}.$

Bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt:
$s \sim t$; „ Weg s ist **proportional** [2] zur Zeit t "

Im Weg-Zeit-Diagramm kann man die Geschwindigkeit am Steigungsdreieck ablesen. Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Geraden (im allgemeinen Fall, bei nicht konstanter Geschwindigkeit: … der Kurve!) im s-t-Diagramm: $v = \frac{s}{t}$.

Beachten Sie aber, dass die aus der Mathematik bekannte geometrische Interpretation Steigung $= \tan\alpha$ (mit dem Steigungswinkel α) direkt und unverändert nur verwendet werden kann, wenn die Maßstabsfaktoren für die Zeit - und die Weg-Achse gleich sind (wenn also das Diagramm mit z.B. im Maßstab $1\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$ und $1\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$ gezeichnet wurde). In diesem Fall könnte der Zahlenwert $\{v\}$ der Geschwindigkeit (der Tangens eines Winkels hat keine Einheiten!) gemäß $\{v\} = \frac{\{s\}}{\{t\}} = \tan\alpha$ aus dem im Diagramm abgelesenen Steigungswinkel α bestimmt werden.

Jede Proportionalitätsrelation $X \sim Y$ kann mittels einer Proportionalitätskonstanten C in eine Gleichung $X = C \cdot Y$ überführt werden. Im Fall unserer Weg-Zeit- Proportionalität, $s \sim t$, erhalten wir so $s = v \cdot t$

- Bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg s proportional zur Zeit t .
- Die Geschwindigkeit ist dabei die Proportionalitätskonstante, es gilt
  $$s = v \cdot t \qquad \text{[Gl.1.1.1.]}$$

Bisher hatten wir vorausgesetzt… "WEG": *seit Start zurückgelegter Weg*
"ZEIT": *seit Start vergangene Zeit*

D.h., für unsere Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ galt für $t = 0$: $s(0) = 0$. Im s–t–Diagramm ergibt sich damit eine Ursprungsgerade.

Aber: Auf dem Bahnfahrplan fährt z.B. nicht jeder Zug um 0 Uhr bei km 0 ab. Um auch Bewegungen beschreiben zu können, die nicht zur Zeit $t = 0$ und beim Ort $s = 0$ beginnen, verwenden wir eine etwas allgemeinere „Orts-Zeit-Funktion", die ohne diese speziellen Anfangsbedingungen auskommt. Zur Beschreibung des Orts können wir bei einer geradlinigen Bewegung z.B. eine der Koordinaten (x, y, oder z) verwenden, oder wir verwenden weiterhin den Buchstaben s (z.B. beiweil einer krummlinigen Bewegung auf einer vorgegebenen Bahn).

Wir wollen nun eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die zu einem Zeitpunkt t_1 am Ort s_1 beginnt, mathematisch beschreiben.

[2] Als Proportionalzeichen wird statt„ ~ " gelegentlich auch das Zeichen „ $\propto$ " verwendet.

Die **<u>Anfangsbedingungen</u>** lauten also: $s(t_1) = s_1$

Der seit dem Start zurückgelegte Weg ist: $s - s_1$

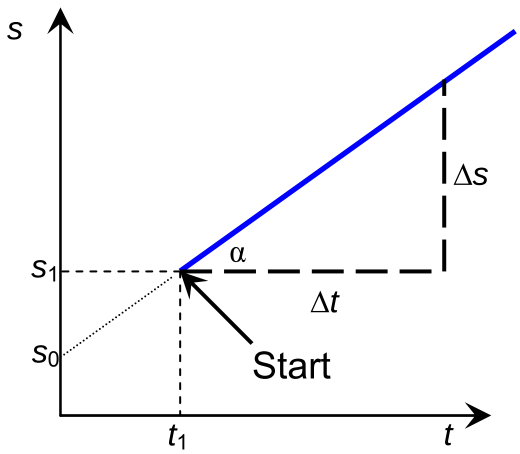
Die seit dem Start vergangene Zeit ist: $t - t_1$

Da die Geschwindigkeit konstant ist gilt:

$Weg \sim Zeit$, also: $(s - s_1) \sim (t - t_1)$

Mit der Geschwindigkeit v als Proportionalitäts-konstanten ergibt sich die Gleichung

$$(s - s_1) = v \cdot (t - t_1)$$



Wenn man die letzte Gleichung nach s auflöst, so erkannt man, dass sie einen konstanten Teil und eine von der Zeit t abhängigen Teil enthält: $s = \underbrace{v \cdot t}_{\text{abh. von } t!} + \underbrace{(s_1 - v t_1)}_{\text{konst.!}}$

Wir bezeichnen den konstanten Teil mit s_0 und erhalten

$s = v \cdot t + s_0$ [Gl.1.1.2.]

(bzw. mit anderen Buchstaben: $x = v \cdot t + x_0$, $y = v \cdot t + y_0$, $h = v \cdot t + h_0$, ...)

Im <u>Orts-Zeit-Diagramm</u> ergibt sich wieder eine Gerade. Diese ist aber verschoben, läuft also nicht notwendigerweise durch den Ursprung. Die Gerade schneidet die s-Achse bei s_0 – beachten Sie aber, dass die Bewegung nicht unbedingt zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen muss; der Achsenabschnitt s_0 ergibt sich lediglich daraus, dass man die Gerade bis zu $t = 0$ extrapoliert. Die Gerade selbst wird durch ihre Steigung (die Geschwindigkeit) und einen beliebigen Punkt (z.B. den Startpunkt $(t_1|s_1)$) festgelegt. Aus dem Diagramm können wir wieder die Geschwindigkeit aus dem Steigungsdreieck ablesen. Es gilt: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_1}{t - t_1}$ [Gl.1.1.3.]

✍ **<u>Übung:</u>**

- Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit 120 km/h. Wie lange braucht es für 2 km?
- Ein Radfahrer braucht für eine Strecke 5 km die Zeit 25 Min., Wie groß ist seine Geschwindigkeit (in km/h , in m/s) ?
- Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist 340 m/s. Welche Strecke legt Schall in 20 ms zurück?
- Ultraschall (US) in Körpergewebe hat eine Geschwindigkeit von ca. 1500 m/s.
  a) Wie lange braucht US für die Strecke von 30 cm ?
  b) Wie lange braucht Röntgenstrahlung für die gleiche Stecke?
- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s.
  a) Wie lange braucht das Licht ihrer Deckenlampe bis zum Fußboden?
  b) Welche Strecke legt Licht (im Vakuum) in 10 ns zurück?
- Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist $c_n = c_0 / n$
  Wasser: $n \approx 1{,}33$, Luft: $n \approx 1{,}000273$
  a) Welche Strecke legt Licht in Wasser in 0,01 µs zurück?
  b) In welcher Zeit t_W durchquert Licht die Strecke s in Wasser (Zahlenbeispiel: s = 10 µm); welche Strecke L legt Licht in der gleichen Zeit im Vakuum zurück („optischer Weg“)?
  d) Wie groß ist die Differenz der optischen Wege in 5 cm Luft und 5 cm Vakuum?

- a) Beschreiben Sie in Worten die im Diagramm „Stuttgart-Heilbronn“ (Seite 3) dargestellten Bewegungen der Fahrzeuge A – D! Welche Bedeutung habe die Schnittpunkte zweier Linien (es gibt zwei verschiedene Arten von Schnittpunkten!)?

  b) Die Fahrtstrecke HN-Stgt. sei 60 km. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge!

- Ein Punkt auf einem Rad mit dem Radius 0,08 m bewegt sich mit der Geschwindigkeit 8 m/s. Wie lange braucht er für 42 Umdrehungen?

- Ein „*Ding*“ startet zum Zeitpunkt $t_1 = 27\,\text{s}$ bei $s_1 = 123\,\text{m}$ und bewegt sich mit der konstanten Geschw. $v = -100\,\text{m/s}$. Bestimmen sie die **Orts-Zeit-Funktion** $s(t)$! Wo befindet es sich zum Zeitpunkt $t_2 = 30\,\text{s}, t_3 = 40\,\text{s}, t_4 = 50\,\text{s}$? Zeichnen Sie die Orts -Zeit-Funktion $s(t)$!
  (Siehe auch: Gnuplot-Datei kin_1d_bsp_1_geschw_const.plt)

- Ein Körper startet zum Zeitpunkt $t_1 = -10\,\text{s}$ bei $x_1 = 0{,}25\,\text{m}$ und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 0{,}75\,\text{m/s}$. Stellen Sie die Orts -Zeit-Funktion $x(t)$ auf, skizzieren Sie $x(t)$! Berechnen Sie die Position des Körpers zu den Zeiten $t_2 = 0\,\text{s},\ t_3 = 1\,\text{s},\ t_4 = 2\,\text{s}$! Berechnen Sie den Zeitpunkt t_5, zu dem der Körper $x_5 = 6{,}25\,\text{m}$ erreicht!

- Ein Fahrzeug befindet sich um 15 Uhr bei $x_1 = 40\,\text{km}$ und fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Um 15:15 Uhr ist es bei $x_2 = 25\,\text{km}$. Bestimmen Sie $x(t)$! Wann erreicht das Fahrzeug $x = 0$?

- Ein Fahrzeug A startet bei $t = 0$ bei $x_1 = 90\,\text{km}$ mit der Geschwindigkeit $v_A = -30\,\text{km/h}$, ein Fahrzeug B startet zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{4}\,\text{h}$ bei $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_B = 50\,\text{km/h}$.
  a) Skizzieren Sie die Bewegungen in einem *x*-*t*-Diagramm!
  b) Bestimmen Sie die beiden Orts-Zeit-Funktionen $x_A(t)$ und $x_B(t)$!
  c) Wann kommt B bei x_1 und wann kommt A bei $x = 0$ an?
  d) Die beiden Fahrzeuge begegnen sich zum Zeitpunkt t_2 am Ort x_2 . Berechnen Sie t_2 und x_2!

Zusammenfassung oder: **W**as - **H**ätten - **W**ir - **L**ernen – **K**önnen ?

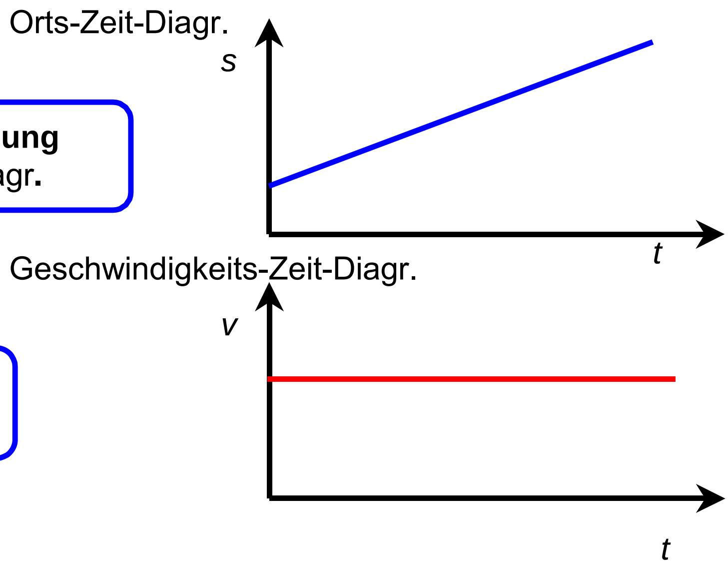
- Die Geschwindigkeit ist die Steigung im Orts-Zeit-Diagramm ($s(t), x(t), \ldots$!)

- Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ergibt im Orts-Zeit-Diagramm eine Gerade (*und im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine waagrechte Linie*).

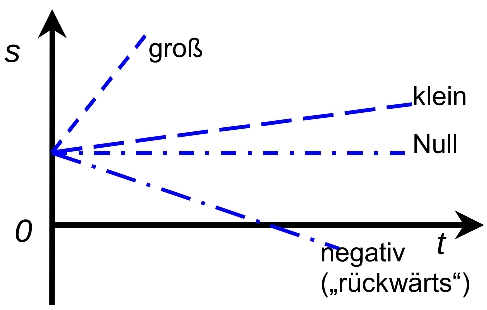
konstante Geschwindigkeit

konstante Steigung
im Orts-Zeit-Diagr.

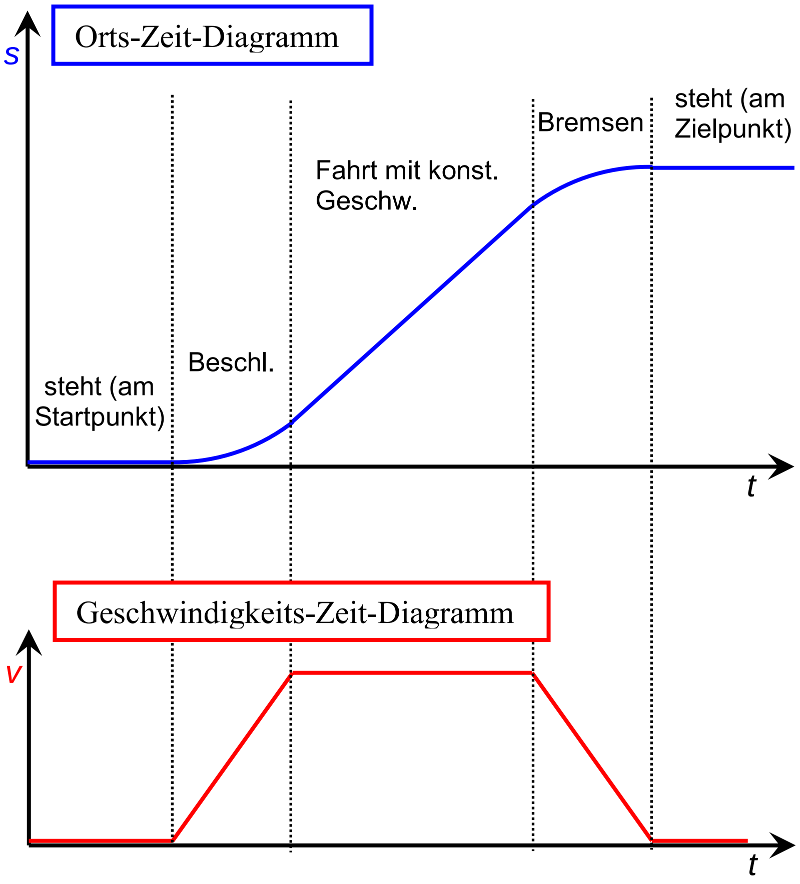
Gerade
$s = v \cdot t + s_0$



- Eine große Geschwindigkeit ergibt eine steil ansteigende Gerade,
  eine kleine Geschwindigkeit eine flache Gerade,
  Geschwindigkeit Null eine waagrechte Gerade.
- Negative Geschwindigkeit (fallende Gerade) bedeutet, dass sich eine Objekt entgegen der von uns gewählten positiven Achsenrichtung bewegt.



Veränderliche Geschwindigkeit

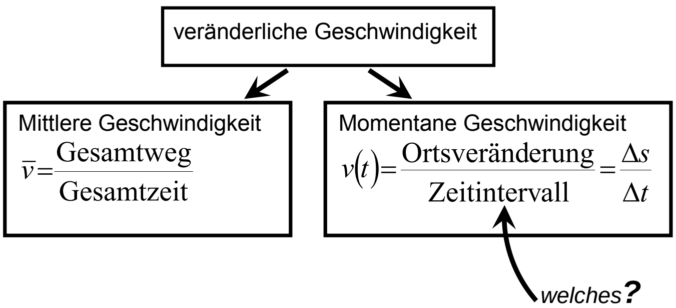


In der Regel verlaufen Bewegungen höchsten zeitweise oder näherungsweise mit konstanter Geschwindigkeit. Z.B. beschreiben die Skizzen → Folgenden Ablauf im Orts-Zeit-bzw. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

- ➢ Ein Fahrzeug steht zunächst am Startpunkt …
- ➢ dann beschleunigt es (Geschwindigkeit steigt), im *s*-*t*-Diagramm ergibt sich eine nach oben gekrümmte Kurve
- ➢ anschließend fährt fas FZ einige Zeit mit konst. Geschw. (Gerade im *s*-*t*-Diagramm, waagerechte Linie im *v*-*t*-Diagramm)
- ➢ dann bremst es, *v* sinkt, die *s*-*t*-*Kurve* ist nach unten gekrümmt
- ➢ … bis v=0 erreicht wird und das FZ am Ziel steht (*s=const.*)

Eine Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit zeigt sich also im Orts-Zeit-Diagramm als (gekrümmte) Kurve.

Bei einer Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit müssen wir (wie übrigens bei jeder anderen zeitabhängigen Größe auch) zwischen dem Momentanwert und dem Durchschnittswert unterscheiden. Man kann z.B. durchaus in einer Stunde nur 30 km zurücklegen und trotzdem kurze Zeit 60 km/h fahren.



- ➢ Die mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittgeschwindigkeit) ist der Quotient von gesamtem zurückgelegten Weg und Gesamtzeit.
- ➢ Die Momentangeschwindigkeit dagegen ergibt sich aus der Wegstrecke, die in einem (kurzen) Zeitintervall[3] zurückgelegt wird.

[3] Die Frage, wie klein das Zeitintervall sein muss, behandeln wir weiter unten.

Beispiele:

- Ein Fahrradtachometer misst das (kurze) Zeitintervall für eine Radumdrehung, er bestimmt damit (näherungsweise) die Momentangeschwindigkeit
- Bei der Verkehrsüberwachung mit Radar (Dopplereffekt), „Laserpistole“, Kontaktschleifen oder (dreifach-) Lichtschranke wird ebenfalls die Momentangeschwindigkeit ermittelt. Wer die Kamera rechtzeitig sieht und vor der Messung bremst, der kann seine Momentangeschwindigkeit u.U. rechtzeitig verringern …

- Neuere Überwachungssysteme in (GB, A, I, NL, …) bestimmen die Zeit für eine längere Strecke mit zwei Kameras und automatische Kennzeichenerkennung. Sie berechnen daraus die mittlere Geschwindigkeit kurzfristiges Bremsen hilf dann nichts mehr …

Übungsbeispiel:

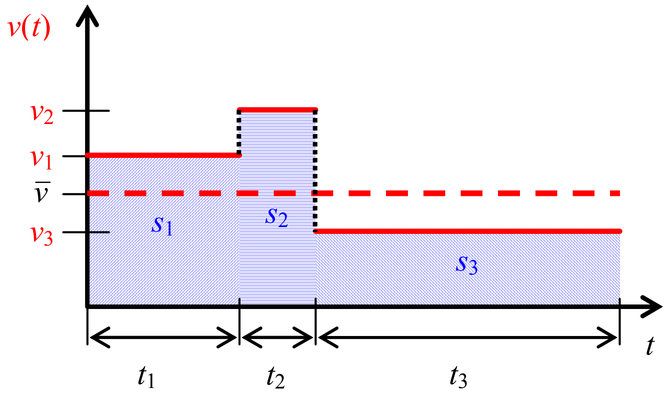
Ein Fahrzeug fährt jeweils …
a) die Hälfte der Zeit b) die Hälfte der Strecke
mit der Geschwindigkeit $v_1 = 40\,\text{km/h}$ bzw. $v_2 = 80\,\text{km/h}$
Berechnen Sie jeweils die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$!

Mittlere Geschwindigkeit
(z.B. bei einer Bewegung mit „stückweise konstanter Geschwindigkeit)

Wir betrachten eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit jeweils für eine gewisse Zeitspanne (bzw. auf einem gewissen Weg) konstant bleibt. Selbstverständlich ist dies nicht exakt realisierbar, da die Geschwindigkeit sich nicht augenblicklich ändern kann. Dies Beschreibung stellt eine Vereinfachung dar, die in vielen Fällen zulässig ist. Voraussetzung ist, dass die Beschleunigungs- bzw. Bremsphasen, bei denen sich die Geschwindigkeit ändert, sehr kurz sind.

Es ist hier einfacher, wenn wir die einzelnen Zeitintervalle[4] mit $t_1, t_2, \ldots$ und die einzelnen Stecken[4] mit $s_1, s_2, \ldots$ bezeichnen. Für das Intervall Nummer i , $i = 1 \ldots N$, gilt dann:

	Zeit	Geschw.	Weg
1)	t_1	v_1	$s_1 = v_1 \cdot t_1$
2)	t_2	v_2	$s_2 = v_2 \cdot t_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	t_i	v_i	$s_i = v_i \cdot t_i$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	t_N	v_N	$s_N = v_N \cdot t_N$

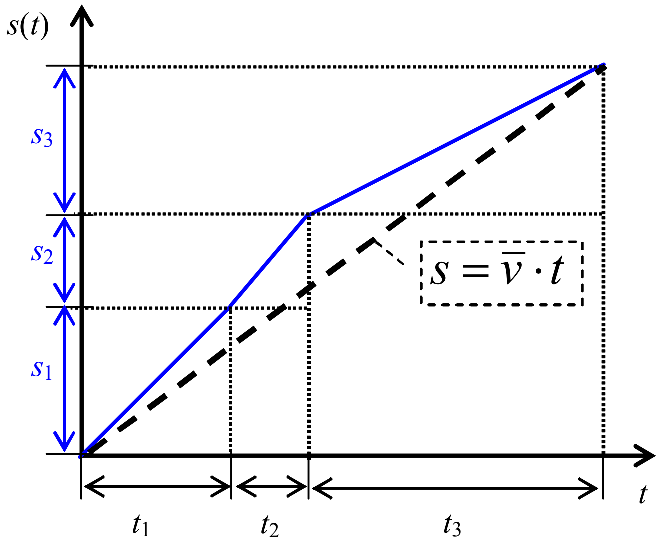


[4] Also t_i bezeichnet hier die Zeitdauer für die einzelne Teilstrecke (nicht den Zeitpunkt) und die s_i bezeichnet die einzelne Teilstrecke (nicht die Koordinate bzw. Position)! ▶ Ohne diese Definition müssten wir in den nachfolgenden Gleichungen umständlicher $(t_2\text{-}t_1)$ statt t_2 ; $(s_2\text{-}s_1)$ statt s_2 etc. schreiben!

Beachten Sie: Die Wegstücke $s_1, s_2, \ldots$ entsprechen in der Skizze den Flächen unter dem jeweiligen Kurvenstücken (durch unterschiedliche Schraffur gekennzeichnet). Die gesamte Fläche , also die Summe dieser Teilstrecken, ist die Gesamtstrecke s_{ges}. Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus $\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}}$. Also muss auch die Fläche $\bar{v} \cdot t_{ges}$ unter der waggerechten Linie (bei $\bar{v}$) die Gesamtstrecke s_{ges} ergeben![5]

Es ist also

$$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + \ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots}$$



Im Weg-Zeit-Diagramm wird eine Bewegung mit der mittleren Geschwindigkeit durch eine Gerade dargestellt, die nach der gleichen Zeit beim gleichen Weg endet wie die eigentliche Bewegung.

Mittlere Geschwindigkeit: $$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}}$$ [Gl.1.1. 4.]

für stückweise konst. Geschw.: $$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i}$$

Dies bedeutet: Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich als **gewichtetes Mittel**[6]: Jeder Wert wird mit einem „Wichtungsfaktor“ multipliziert, das Ergebnis wird aufsummiert und am Schluss durch die Summe der Wichtungsfaktoren dividiert. Beim zeitlichen Mittel sind die Wichtungsfaktoren durch die jeweiligen Zeitintervalle gegeben.

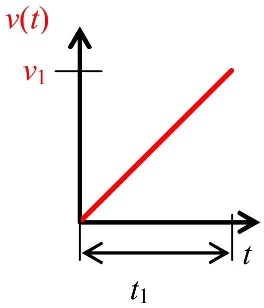
[5] Dies gilt allgemein: Den Mittelwert einer zeitabhängigen physikalische Größe „$X(t)$“ (z.B. Spannung, Temperatur, Druck, Beschleunigung, …) erhält man, indem man im $X(t)$ - t -Diagramm eine waagerechte Linie einzeichnet, die die gleiche Fläche zur t-Achse einschließt.

[6] Vergl. z.B. die Berechnung eines gewichteten Notendurchschnitts:
Summe (Note * Wichtungsfaktor) / Summe (Wichtungsfaktoren)

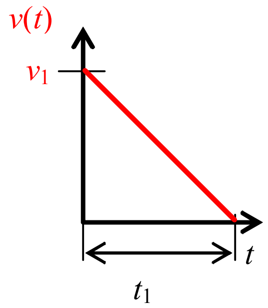
Übung:

Welche Bewegung beschreiben die folgenden v-t-Diagramme? Wie groß ist hier jeweils mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$?

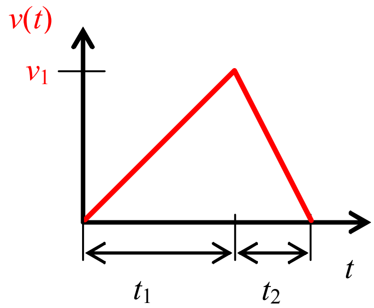
a)



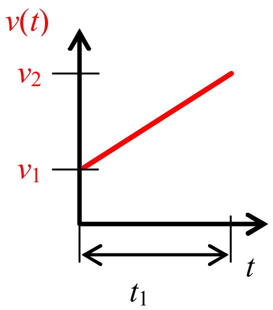
b)



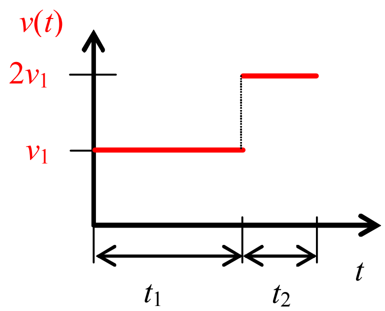
c)



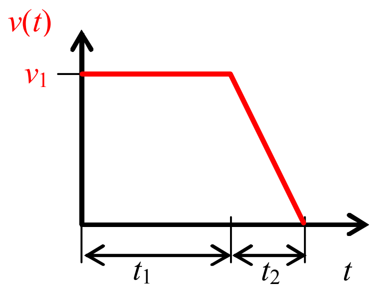
d)



e) $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}s$



f) $s_1 = \frac{4}{5}s$, $s_2 = \frac{1}{5}s$



Momentane Geschwindigkeit:

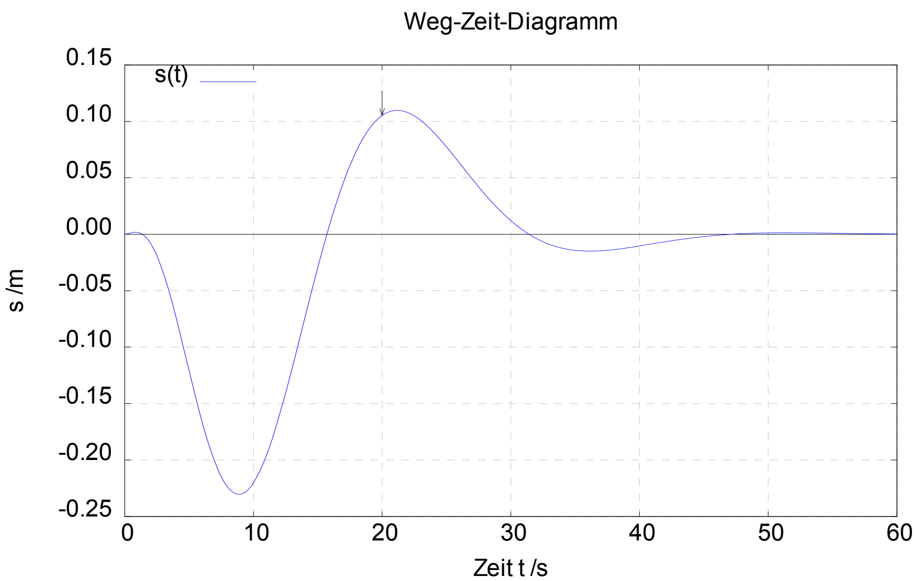
Es wurde weiter oben schon gesagt, dass sich die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ ergibt als:

$$v(t) = \frac{\text{Ortsveränderung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

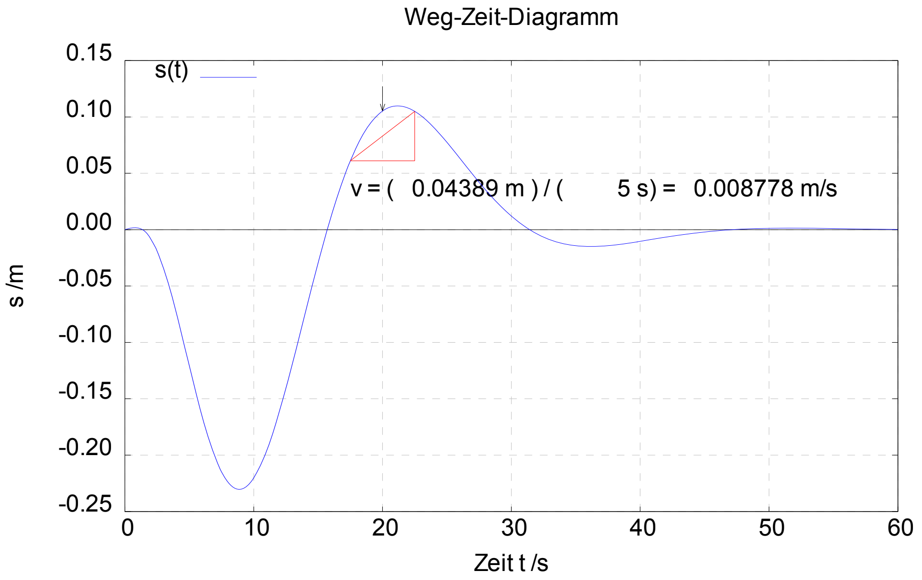
Dabei ist Δt ein „genügend kleines“ Zeitintervall. Wie klein muss Δt sein ?

Wir betrachten dazu als Beispiel einen Bewegungsvorgang, bei dem sich ein Körper von $x = 0$ aus mehrfach zwischen $x > 0$ und $x < 0$ hin und her bewegt und seine Geschwindigkeit dauernd ändert.

1) Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit bei $\underline{t_1 = 20\,\mathrm{s}}$?



2) Wir nehmen zunächst ein Zeitintervall von $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, betrachten also den Zeitraum von 17,5 s bis 22,5 s. Die Differenz zwischen Anfangs- und Endposition in dieser Zeit ist 43,89 mm und aus dem Steigungsdreieck ergibt sich die Geschw. zu 8,778 mm/s – allerdings bewegt sich der Körper völlig anders!

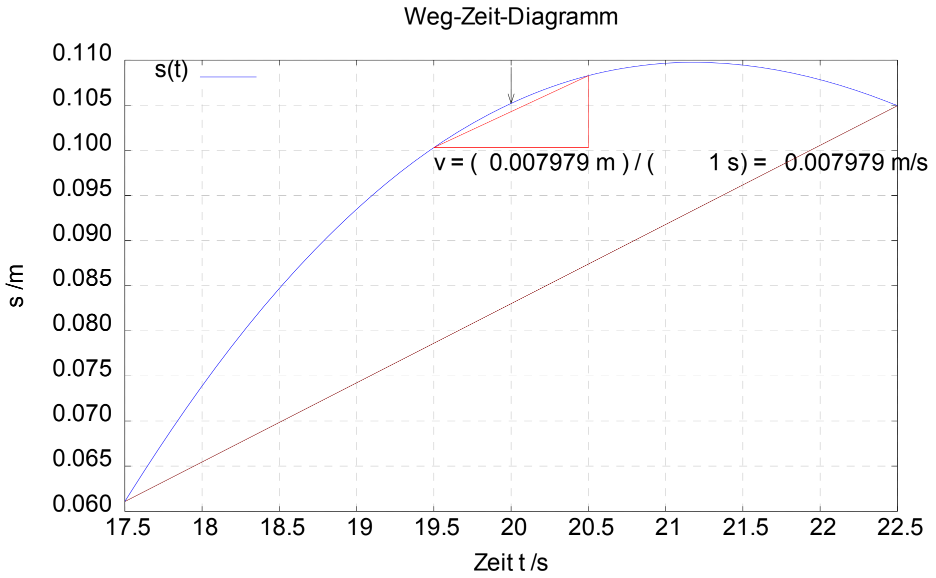


3) Wir vergrößern einen Ausschnitt aus dem Diagramm, so dass wir nur noch den Zeitraum von 17,5 s bis 22,5 s sehen …

Mit $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ ergibt sich

$v = 7{,}979\ \mathrm{mm/s}$

…

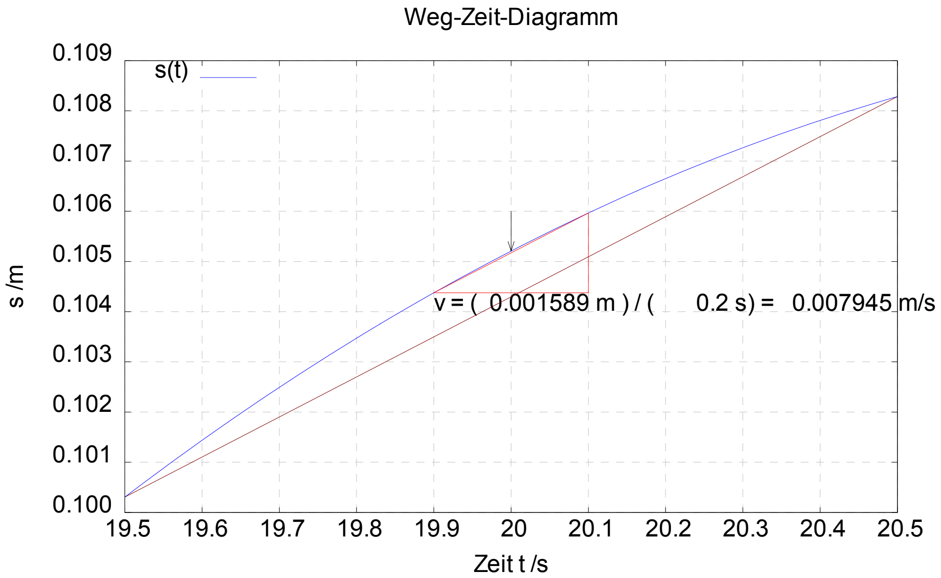


4) …

Mit $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ ergibt sich

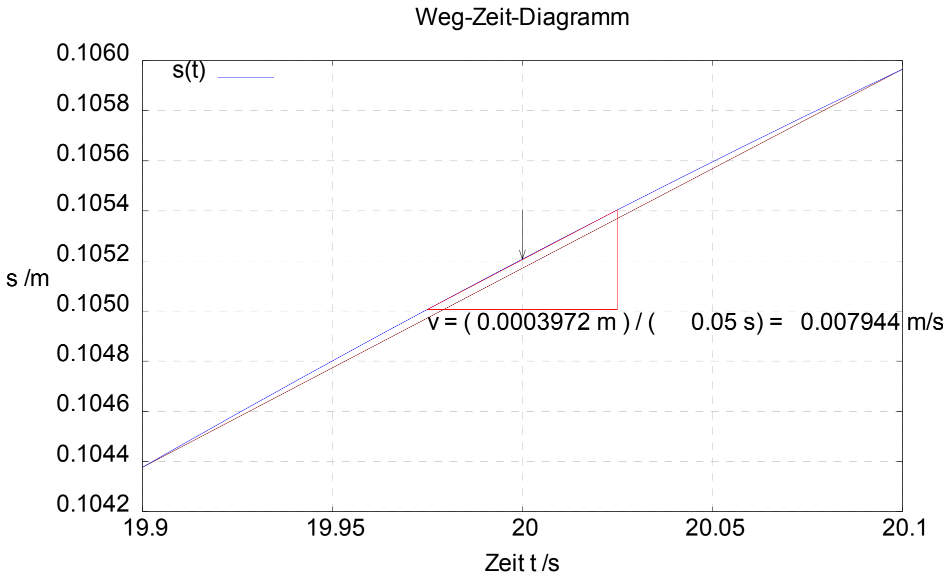
$v = 7{,}945\ \mathrm{mm/s}$

Jetzt ist der Unterschied zwischen der wirklichen Bewegung (blaue Kurve) und der Hypotenuse des Steigungsdreiecks (rote Linie) kaum mehr zu sehen …



4) Die Vergrößerung zeigt aber noch kleine Abweichungen, mit
$\Delta t = 0{,}05\,\mathrm{s}$
ergibt sich fast der gleiche Wert wie im vorherigen Schritt,

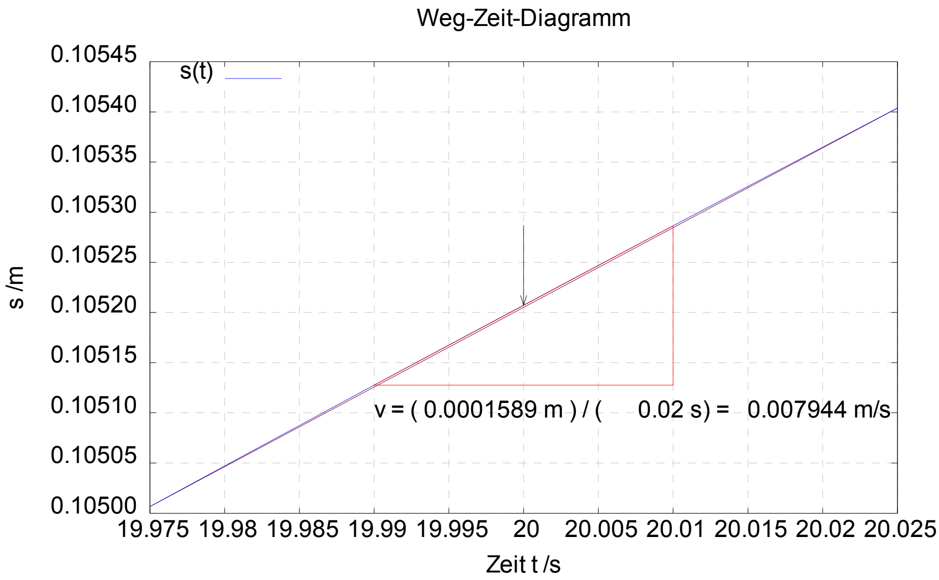
$v = 7{,}944\,\mathrm{mm/s}$



5) …
mit $\Delta t = 0{,}02\,\mathrm{s}$
ergibt sich wieder

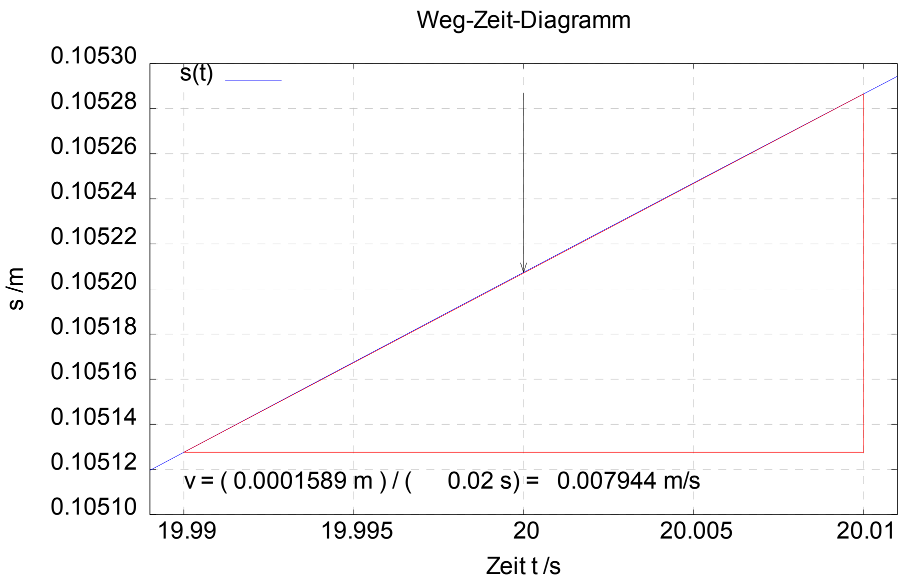
$v = 7{,}944\,\mathrm{mm/s}$,

also (auf 4 Dezimalen genau) der gleiche Wert wie oben!



6) In der letzten Vergrößerungsstufe (mit $\Delta t = 0{,}02\,\mathrm{s}$) sieht man praktisch keinen Unterschied mehr zwischen der geraden Linie aus dem Steigungsdreieck und der blauen , (ursprünglich „krummen“) Linie der Bewegung.

$\boxed{v = 7{,}944\,\mathrm{mm/s}}$



Beachten Sie:

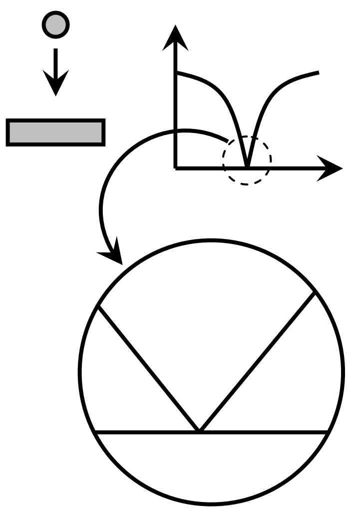
- Wir haben in allen Diagrammen immer die gleiche Funktion $s(t)$ gezeichnet!
- Bei „genügend starker Vergrößerung“ (entspricht „genügend kleinem Δt) wird aus der gekrümmten Linie näherungsweise eine Gerade. Bei einer Geraden ist aber die Steigung unabhängig von der Größe des Δt -Intervalls!
- Wenn wir die Steigung einer gekrümmten Kurve an einem bestimmten Punkt bestimmen wollen, dann müssen wir Δt so klein machen, das die Kurve praktisch mit der schrägen Seite des Steigungsdreiecks zusammenfällt!
- Dies geht (*„Satz aus Mathematik“*) wenn …
  - die betrachtete Funktion $s(t)$ stetig ist (keine „*Lücken*“ hat und „*keine Sprünge macht*“)
    Dies ist in der Physik (im Gegensatz zur Mathematik) aber eigentlich kein Problem: Ein Körper ist zu jedem Zeitpunkt irgendwo und er kann nicht in Null Zeit von A nach B kommen!
  - und „keine Ecken hat“ (siehe weiter unten!)

Steigung ⇨ $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = s'(t) \quad = \dot{s}(t)$ [Gl.1.1.5.]

"1. Ableitung des Orts nach der Zeit"

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

Gibt es Orts-Zeit-Funktionen *s(t) "mit Ecken"* (Mathe : nicht stetig differenzierbare Funktionen) ?



Ecken in s(t)-Fkt. : "künstlich", nur math. Problem!

Physikalisch sinnvolle s(t)-Fkt. sind stetig-diff.-bar, da sonst unendl. Kräfte nötig wären!

Abhilfe im Bsp.: Modell verbessern, Elastizität der Kugel berücksichtigen !

Wie sieht dann s(t) bzw. v(t) aus ?

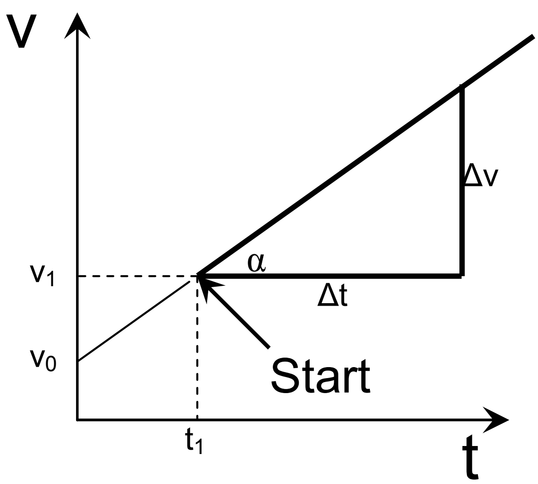
1.1.2 Beschleunigung

<u>Beschleunigte</u> Bewegung ⇔ Geschwindigkeit ändert sich !

↗ (+) bzw. ↘ (-)

Geschw. v ist Funktion der Zeit t: $v=v(t)$

z.B. Geschw. ändert sich *linear* - gleichf. beschl. Bewegung:



Versch. Arten der math. Beschreibung:

$$(v - v_1) \propto (t - t_1)$$

$$(v - v_1) = a \cdot (t - t_1)$$

$$v = \underbrace{a \cdot t}_{\text{abh. von t!}} + \underbrace{(v_1 - at_1)}_{\text{konst.!}}$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

Steigungs-Dreieck:

$$\tan\alpha = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_1}{t - t_1} \qquad \text{[Gl.1.1.6.]}$$

☞ **W-H-W-L-K?** *(Momentan-)* **Beschleunigung = Steigung im *v(t)* - Diagramm!**

Steigung ⇨ $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v'(t) \;= \dot{v}(t)$ "**<u>1. Ableitung der Geschwindigkeit</u>** nach der Zeit"

[Gl.1.1.7.]

Mit $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ergibt dies … $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left\{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right\}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}$ "**<u>2. Ableitung des Orts</u>** nach der Zeit"

[Gl.1.1.8.]

Ort ⇨ Geschwindigkeit ⇨ Beschleunigung !! jeweils differenzieren !!

Wie erhalten wir d. **Geschwindigk. *v*** aus d. **Beschleunigung *a*?**

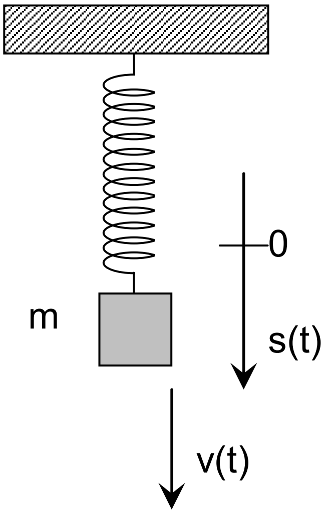
Wie erhalten wir d. **Ort *s*** aus d. **Geschwindigkeit *v*?**

Beschleunigung ⇨ Geschwindigkeit ⇨ Ort !! jeweils integrieren !!

$$\int a\,\mathrm{d}t = v(t) \qquad\qquad \int v\,\mathrm{d}t = s(t)$$

Beispiele

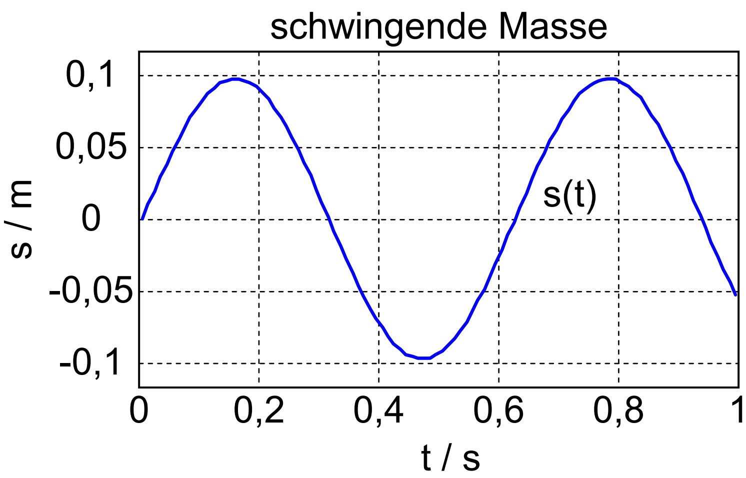
a. Masse schwingt an Feder:



$s(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

geg.: Amplitude A= 10 cm

Frequenz f bzw.
Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f = 10\ 1/\mathrm{s}$

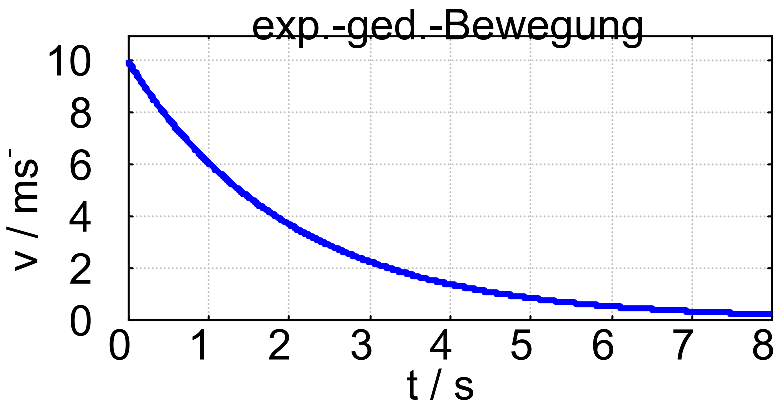


Bestimmen **Sie** die Geschwindigkeit *v(t)* als Funktion der Zeit sowie die Beschleunigung *a(t)* als Funktion der Zeit! Berechnen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 0.3$ s , die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_2 = 0.3\ \pi$ s (= 0.942478 s) sowie den Maximalwert der Geschwindigkeit und Beschleunigung!

Nehmen Sie Ihr Ergebnis für *a(t)* und bestimmen Sie daraus wieder *v(t)* und *s(t)*! Zeichnen Sie die Funktionen *s(t), v(t), a(t) (oder lassen Sie dies Ihren Si-Knecht machen)* !

b. "Exponentiell-gebremste Bewegung": geg.: Geschwindigkeit: $v(t) = v_0 \cdot e^{-\lambda t}$ mit

v_0 = 10 m/s u. λ = 0.5 1/s
Bestimmen Sie **Beschl.** *a(t)* und Weg *s(t)*! (bei *t* = 0 sei *s(0)* = 0 !)



konstante
Beispiel c
Beschleunigung

⇔ gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = const.}$$

$$v(t) = \int a\,\mathrm{d}t$$
$$= ?$$
$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= ?$$

Wichtigste Anw.:
Beschl. im **Schwerefeld der Erde (Wurf, freier Fall)**
$\boldsymbol{a = g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}}$

[Gl.1.1.9.]

(nur in der Nähe der Erdoberfläche!!!!)

① $a = const.$

② $v(t) = \int a\,\mathrm{d}t = a \cdot t + v_0$

③ $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 t + s_0$

"unbestimmte Integrale"

$\Rightarrow$ bei **j e d e r** Integration eine "Integrationskonstante" ! $\Rightarrow$ ***v_0 , s_0***

Bedeutung: Geschw. u. Ort "zum Zeitp. *t=0*"

Bestimmung: **aus Anfangsbedingungen**

einfachstes Beispiel:

bei t=0 sei gegeben $v(0) = 0$ *und* $s(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v_0 = 0}$ $\boldsymbol{s_0 = 0}$

also einfach … $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

sonst: *Anf.-Bed. in ② bzw. ③ einsetzen,* ***v_0 , s_0 bestimmen!***

Kinematik-Rezepte

⓪	•	Skizze anfertigen, Koordinatensystem u. Richtungen festlegen! *Wo ist für Sie s=0* ***?*** *Welche Richtung ist +* ***?***
	•	Nullpunkt der Zeitachse festlegen! *Welchen Zeitpunkt bezeichnen Sie als t=0* ***?***

		allgemeine Formel	Bsp.: gleichf. Beschl.
①	Beschleunigung best.!	$a(t) = \ldots$	$a = const.$
②	1. Integration ➢eine Integrationsk.	$v(t) = \int a \, \mathrm{d}t = \ldots$	$v(t) = a \cdot t + v_0$
③	2. Integration ➢eine weitere Integr.-konst.	$s(t) = \int v(t) \, \mathrm{d}t = \ldots$	$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 t + s_0$
④	Anfangsbedingungen aufschreiben	t_1: $s(t_1) = s_1$ t_2: $v(t_2) = v_2$	$t = 0$: $s(0) = 0$; $v(0) = 0$
⑤	④ in ② u. ③ einsetzen, Integrationskonst. best.	$s(t_1) = s_1 \quad \Rightarrow s_0 = \ldots$ $v(t_2) = v_2 \quad \Rightarrow v_0 = \ldots$	$s_0 = 0$; $v_0 = 0$

⑥	Orts-/Geschw.-Zeit-Bez.	$s(t) = \ldots$ $\quad v(t) = \ldots$	$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $v(t) = a \cdot t$

☞ <u>**E i n** Koordinatensystem - **e i n e** Zeit *t* !</u> sonst :

<u>Oder</u> … *mit bestimmten Integralen*

✂---

Mathe: **<u>un</u>**bestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ [Gl.1.1.10.]

bestimmtes Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ [Gl.1.1.11.]

$\Rightarrow$ *keine unbest. Konstante C!* ☺

✂---

Anfangsbedingungen in bestimmtes Integral einsetzen …

<u>Bsp.:</u>

a=const. ; $v(t_1) = v_1$; $s(t_1) = s_1$

$$v(t) - v(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} a(t')\,\mathrm{d}t' \qquad v(t) - v_1 = a \cdot (t - t_1)$$

$$s(t) - s(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} v(t')\,\mathrm{d}t' \qquad s(t) - s_1 = \tfrac{1}{2} a \cdot (t - t_1)^2 + v_1 \cdot (t - t_1) \quad (***)$$

(***) ausmultiplizieren, umstellen …Ergebnis kennen wir schon!

gleiches Ergebnis! ¿ *einfacher* **?**

Bem: Darstellung als $\ldots(t - t_1)^2 + \ldots(t - t_1) + \ldots$ wie bei (***) ist dann besonders sinnvoll u. übersichtlich, wenn Ort und/oder Geschwindigkeit nicht bei *t=0* sondern bei $t = t_1$ bekannt sind und/oder die Beschleunigung ab $t = t_1$ wirkt!

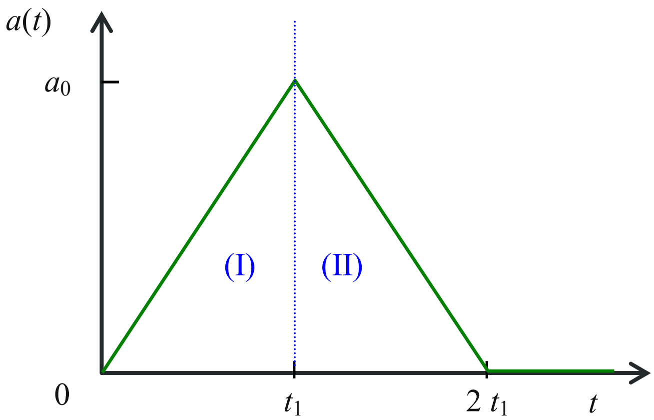
Beispiel ***„Dreiecks-Beschleunigung"***

Wir betrachten ein „sanftes Anfahren", d.h. ein Körper soll auf eine Endgeschwindigkeit beschleunigt werden, ohne dass die Beschleunigung $a(t)$ „Sprünge" macht. Eine einfache Möglichkeit dafür ist, dass $a(t)$ innerhalb der Zeit t_1 linear von Null auf die Maximalbeschleunigung a_0 anwächst, und dann bis zum Zeitpunkt $2t_1$ wieder linear bis auf Null absinkt. Es sei $v(0)=0$ und $x(0)=0$.

- Beschleunigung

Damit erhält man für die Beschleunigung (mit Fallunterscheidung für die zwei Phasen):

$$a(t)=\begin{cases} \frac{a_0}{t_1}\cdot t & 0\le t\le t_1 \qquad \text{(I)} \\ a_0-\frac{a_0}{t_1}\cdot(t-t_1) & t_1<t\le 2t_1 \qquad \text{(II)} \end{cases}$$



Anmerkungen:
Fall I: $a(t)$ soll mit t linear von Null an anwachsen. Damit ergibt sich für Fall I eine Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{a_0}{t_1}$, also $a_I(t)=\frac{a_0}{t_1}\cdot t$.
Fall II: Es gibt (wie meistens) mehrere Wege, um zur Beschleunigung im Fall II zu kommen:

1. Verlängern Sie die fallende Gerade rückwärts bis zu $t=0$, der Achsenabschnitt ist $2a_0$, die Steigung vom Betrag wie bei I, jedoch negativ, also: $a_{II}(t)=2a_0-\frac{a_0}{t_1}\cdot t$.
2. Gehen Sie vom Punkt bei t_1 (Maximum) aus. Dort ist $a=a_0$. Ab $t=t_1$ fällt $a(t)$ mit der (negativen) Steigung $-\frac{a_0}{t_1}$. Also ist $a_{II}(t)=a_0-\frac{a_0}{t_1}\cdot(t-t_1)$
3. Gehen Sie vom Punkt bei $2t_1$ (Nulldurchgang) aus. Dort ist $a=0$. Vor $t=t_1$ fällt $a(t)$ mit der (negativen) Steigung $-\frac{a_0}{t_1}$. Also ist $a_{II}(t)=0-\frac{a_0}{t_1}\cdot(t-2t_1)$

Alle drei Ansätze liefern das gleiche Ergebnis!

Übung: Zeigen Sie, dass die drei Ergebnisse identisch sind!
Stellen Sie zur Übung die Gleichung für $a(t)$ auf, wenn die Phase mit abfallender Beschleunigung (II) die doppelte Zeit dauert $(t_1<t\le 3t_1)$

- **Geschwindigkeit**

Die **Geschwindigkeit** erhalten wir durch Integration aus der Beschleunigung: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$.
Dabei müssen wir natürlich wieder die Fallunterscheidung beachten und unbedingt auf die

Anfangs- bzw. Anschlussbedingungen achten. Diese sind:

Für Fall I : $v(0) = 0$

Für Fall II : $v_I(t_1) = v_{II}(t_1)$, Da v stetig sein muss, muss die Formel für Fall II für $t = t_1$ das gleiche Ergebnis liefern wie die Formel für Fall I!

Hinweis: Die Geschwindigkeiten für die Zeitpunkte t_1 und $2t_1$ können wir unmittelbar aus den Dreiecksflächen bestimmen: $v(t_1) = \frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot a_0$ und $v(2t_1) = \frac{1}{2} \cdot 2t_1 \cdot a_0 = t_1 \cdot a_0$.
Sie sollten dies verwenden, um die allgemeinen Formeln für $v(t)$ zu überprüfen!

Für **Fall I** ergibt sich durch Integration:

$$v_I(t) = \int a_I(t) \mathrm{d}t$$

$$v_I(t) = \int \frac{a_0}{t_1} \cdot t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0}{t_1} \cdot t^2$$

Wegen $v(0) = 0$ ist die Integrationskonstante Null. Auch wenn wir das bestimmte Integral $v(t) - v(0) = \int_0^t a(t') \mathrm{d}t'$ ausrechnen, erhalten genau so schnell und einfach das Ergebnis:

$$v_I(t) - \underbrace{v_I(0)}_{=0} = \int_0^t \frac{a_0}{t_1} \cdot t' \mathrm{d}t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0}{t_1} \cdot t^2 - 0$$

Übung: Überprüfen Sie, ob Sie für t_1 das richtige Ergebnis erhalten (vergl. Dreiecksfläche) !

Für **Fall II** verwenden wir das bestimmte Integral $v(t) - v(t_1) = \int_{t_1}^t a(t') \mathrm{d}t'$. Also:

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^t a_0 - \frac{a_0}{t_1} \cdot (t' - t_1) \mathrm{d}t'$$

Es ergibt sich (**Nachrechnen**!) :

$$v(t) = \tfrac{1}{2} a_0 t_1 + a_0 \cdot (t - t_1) - \frac{a_0}{2t_1} \cdot (t - t_1)^2$$

Damit ergibt sich für $v(t)$ insgesamt:

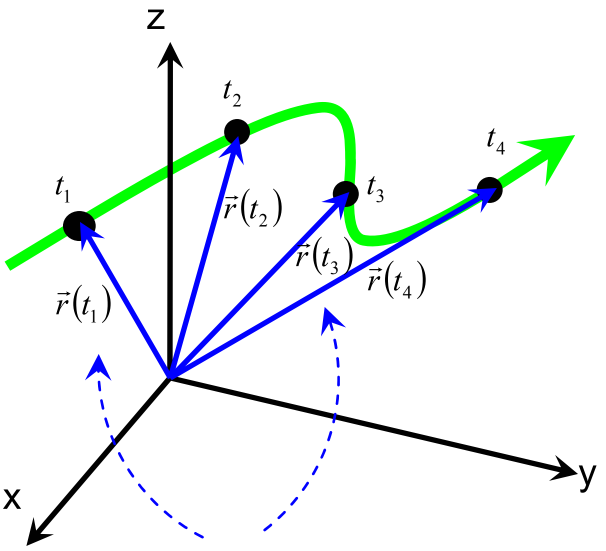
$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0}{t_1} \cdot t^2 & 0 \le t \le t_1 \quad \text{(I)} \\ \frac{1}{2} a_0 t_1 + a_0 \cdot (t - t_1) - \frac{a_0}{2t_1} \cdot (t - t_1)^2 & t_1 < t \le 2t_1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

- **Ort**

1.1.3 Bew. in mehreren Dimensionen

"krummlinige Bew."

1.1.3.1 Orts- u. Geschw.-Vektor



Ortsvektor $\vec{r}(t)$
ist Funktion der Zeit!

Beschreibung einer Bewegung im Raum:

3 Koordinaten $\Rightarrow$ 3 Funktionen der Zeit

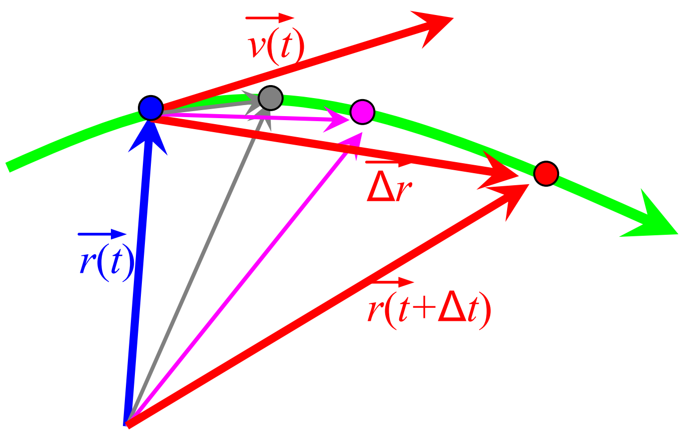
$x(t), y(t), z(t)$

Zusammenfassung zu einem Vektor:

Ortsvektor $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$ [Gl.1.1.12.]

Geschwindigkeits-Vektor

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} \end{pmatrix}$$ [Gl.1.1.13.]



Richtung von $\vec{v}$: Tangente der Bahnkurve!

Beispiel: Bew. mit konst. Geschwindigkeit

- gegeben: Ort u. Geschw. bei *t=0*

	Ort [m]	Geschw. [m/s]
x-Komp.	3	1
y-Komp.	5	-1
z-Komp.	-2	0

- Es ist $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = const.$

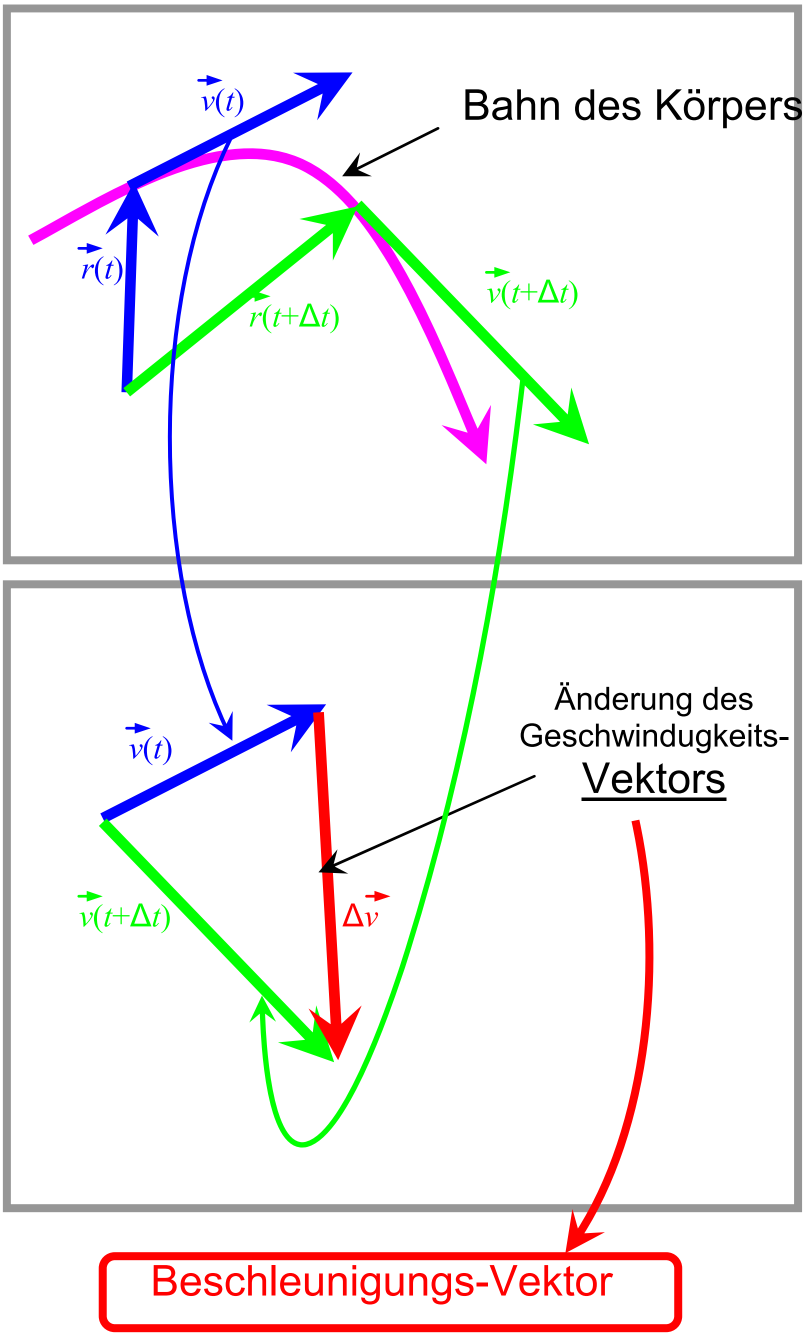
  und somit $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$ mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

- Wo ist der Körper zum Zeitpunkt $t_1 = 10\,\mathrm{s}$? $\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- Berechnen Sie den Betrag der Geschw.! $|\vec{v}_0| = \dots$
- Wann ist der Körper bei *y=0* ? Wo (x,y,z!) ist er dann ?

  $t_2 = \dots$ $\vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

- Welcher Winkel ist zw. $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$? $\alpha = \dots$
- Zeichnen Sie in ein "y-x-Diagramm" die Bahn des Körpers, den Ortsvektor zum Zeitpunkt *t=0* und *t=1* s! Kennzeichnen Sie auf der Bahn die Position des Körpers in 1 s-Schritten zwischen *t=0* und *t= 10* s !

1.1.3.2 Beschleunigungs-Vektor



Geschwindigkeit zum Zeitp. t : $\vec{v}(t)$

… zum Zeitp. $t+\Delta t : \vec{v}(t+\Delta t)$

… -Änderung: $\Delta\vec{v}$

Änderung $\Delta\vec{v}$ des Geschw.-Vektors $\vec{v}$:		
Betrag	Richtung	Betrag und Richtung

Beschleunigung

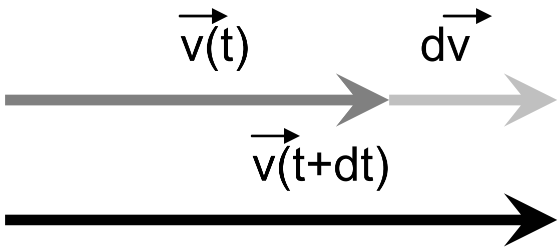
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix} \qquad \text{[Gl.1.1.14.]}$$

Tangential- Beschleunigung	**Normal**-Beschleunigung	allg. Fall
$\vec{a} \parallel \vec{v}$	$\vec{a} \perp \vec{v}$	
Richtung bleibt konst.	Richtung ändert sich	Richtung <u>und</u>
$\lvert\vec{v}\rvert$ ändert sich	$\lvert\vec{v}\rvert$ bleibt konst.	$\lvert\vec{v}\rvert$ ändern sich
	Vektor $\vec{a}$ zeigt zur *"Innenseite der Kurve"*!	

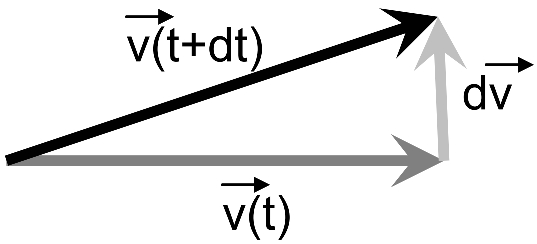
<u>1. Tangentialbeschleunigung:</u>

$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a} \cdot \mathrm{d}t$

$\vec{a} \parallel \vec{v} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{v} \parallel \vec{v}$ $\qquad \Rightarrow$ nur **der Betrag** von $\vec{v}$ ändert sich!



<u>2. Normalbeschleunigung:</u>



$\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{v} \perp \vec{v}$ $\qquad \Rightarrow$ nur **die Richtung** von $\vec{v}$ ändert sich!

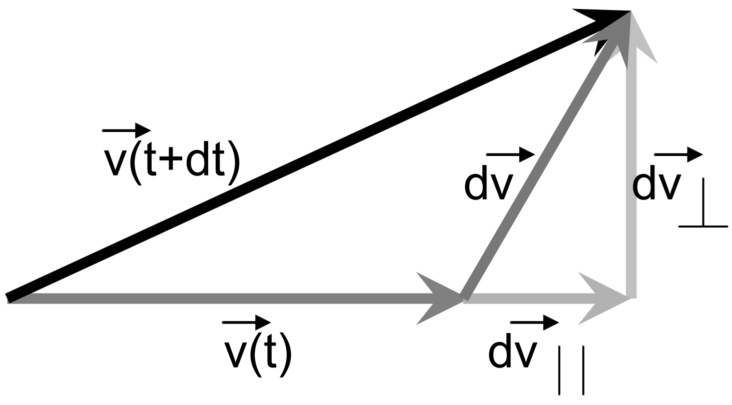
Bem.: für eine <u>Normal</u>beschl. und "*infinitesimal kleine*" $\mathrm{d}t$ bzw. $\mathrm{d}\vec{v}$ ist $\lvert\vec{v}(t+\mathrm{d}t)\rvert \approx \lvert\vec{v}(t)\rvert$!

<u>3. beliebige Richtung:</u>

$\vec{a}$ wird zerlegt in eine Komp. parallel zu $\vec{v}$

und eine Komp. senkrecht zu $\vec{v}$: $\vec{a} = \vec{a}_{II} + \vec{a}_{\perp}$

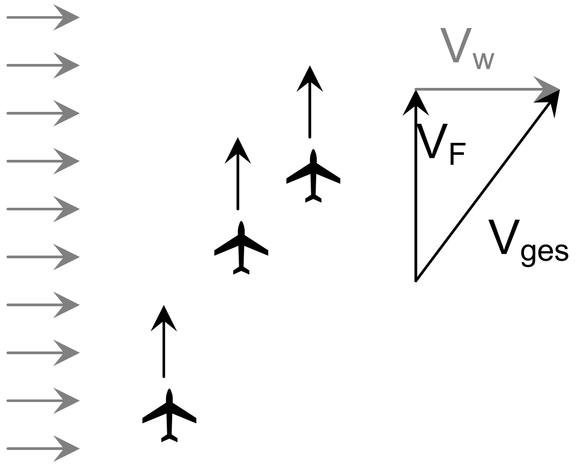
bzw. Geschw.-Änderung $d\vec{v} = d\vec{v}_{II} + d\vec{v}_{\perp}$



1.1.3.3 Überlagerung von Bewegungsabläufen Superpositionsprinzip

- Gleichzeitig ablaufende Bewegungen eines Körpers beeinflussen einander **<u>nicht</u>**
- Wenn diese Bewegungen einzeln nacheinander ablaufen wird der gleiche Bewegungszustand erreicht
- Ein (komplizierter) Bewegungsablauf kann in einzelne (einfachere) Teil-Bewegungen "zerlegt" werden

Beispiel: <u>Flugzeug - Wind</u>



Beschleunigungen, Geschwindigkeiten, Ortsvektoren

… <u>vektoriell addieren!</u>

Bem: Dies gilt nicht mehr unverändert, wenn die Geschw. sehr groß (vergleichbarmit der Lichtgeschw.) werden! ⇨ Relativität!

Begr.:

a.) Physik - Bewegungen stören sich nicht

(⇔ Beschr. der gl. Bew. in versch Bezugssystemen)

b.)

✂--

Mathe: Integral (≙ Σ!) → "*<u>lineare</u> Operation*"

$$\int \left[f(x) + g(x) \right] \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

"erst addieren, dann 1 Integral = 2 × integrieren, dann addieren"

✂--

	Bew. 1	Bew. 2	Gesamt-Bew.
Beschleunigung	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$
Geschwindigkeit	$\vec{v}_1 = \int \vec{a}_1\,\mathrm{d}t$	$\vec{v}_2 = \int \vec{a}_2\,\mathrm{d}t$	$\vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t$ $= \int \left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)\mathrm{d}t$ $= \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
Ortsvektor	$\vec{r}_1 = \int \vec{v}_1\,\mathrm{d}t$	$\vec{r}_2 = \int \vec{v}_2\,\mathrm{d}t$	$\vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t$ $= \int \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right)\mathrm{d}t$ $= \vec{r}_1 + \vec{r}_2$

[Gl.1.1.15.]

☞ Merke: gleiches Ergebnis , egal ob Sie …

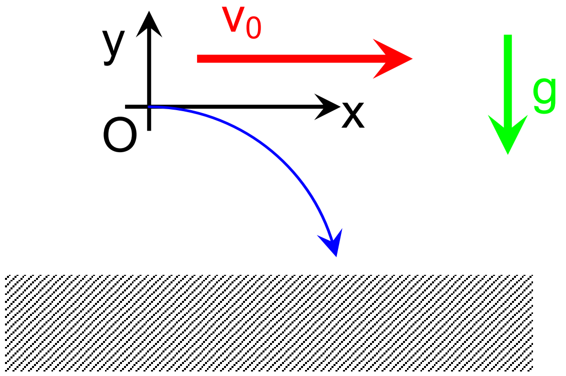
1. *Beschleunigungen "a" addieren, daraus "v" und "r" ausrechnen* oder
2. *für jede Bew. einzeln "v" ausrechnen, dann "v" addieren* oder
3. *für jede Bew. einzeln "r" ausrechnen, dann "r" addieren*

Bsp.1: waagerechter Wurf

Überlagerung von

Bew. 1: konst. Geschwindigkeit →

Bew. 2: konst. Beschleunigung ↓



Anfangsbed.: $x(0)=0$, $v_x(0)=v_0$

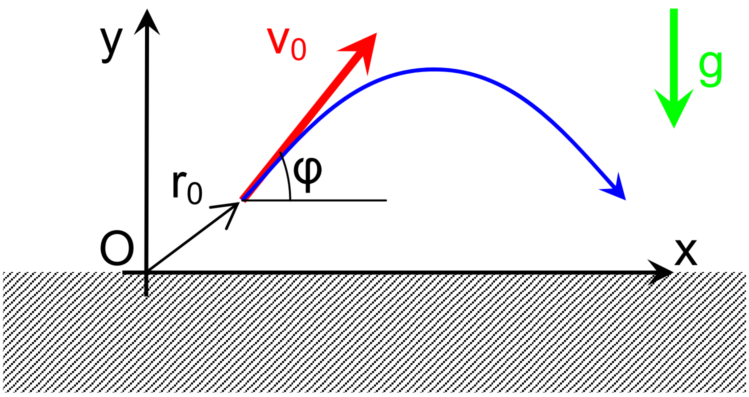
$y(0)=0$, $v_y(0)=0$

(Abwurf im Ursprung, y-Achse nach oben)

	Bew. 1:hor. Bew. mit konst Geschw.	Bew. 2:vert. Bew. mit konst. Beschl.	Gesamt-Bew.
Beschleunigung	$\vec{a}_1 = \vec{0}$	$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$
Orstvektor	$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} gt^2 \end{pmatrix}$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2} gt^2 \end{pmatrix}$

[Gl.1.1.16.]

Bsp. 2: schiefer Wurf



Überlagerung von

Bew. 1:
konst. Geschwindigkeit $\vec{v}_0$

Bew. 2:
konst. Beschleunigung ↓

Anfangsbed.: Abwurf bei $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *(gegeben)*

Abwurfgeschw. $v_0 = |\vec{v}_0|$, Winkel zur Horiz.: φ *(geg.)*

Zerl. der Anfangs-Geschw. in x- u. y-Komp.: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$

	Bew. 1: konst Geschw. $\vec{v}_0$	Bew. 2: konst. Beschl. $\vec{g}$	Gesamt-Bew.
Beschl.	$\vec{a}_1 = \vec{0}$	$\vec{a}_2 = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \vec{g}$
Geschw.	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0$

Ortsv.	$\vec{r}_1 = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \cdot t + x_0 \\ v_0 \cdot \sin\varphi \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$	$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$	$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

[Gl.1.1.17.]

oder: Bew. 1: hor. Bew. mit konst Geschw. $v_x = v_0 \cdot \cos\varphi$

Bew. 2: vert. Bew. konst. Beschl., Anfangsgeschw. $v_{y_0} = v_0 \cdot \sin\varphi$

Ergebnis (*wie oben*):

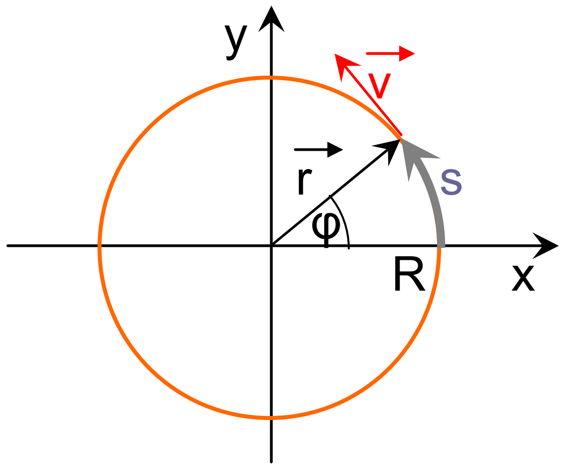
$$\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t^2 + \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \quad + v_0 \cdot \cos\varphi \cdot t + x_0 \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\varphi \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

[Gl.1.1.18.]

$\Rightarrow$ Bahnkurve y=y(x), Wurfweite, Wurfhöhe, optim. Abwurfwinkel etc.

1.1.3.4 Kreisbewegung



zunächst: **gleichförmige** Kreisbewegung:

$|\vec{v}| = const.$

$\Rightarrow \vec{a}_{II} = \vec{0}$! nur Normalbeschl. $\vec{a}_{\perp}$!

Richtung
von $\vec{v}$ ändert sich dauernd

$\Rightarrow$ **beschleunigte Bewegung!**

Richtung von $\vec{a}$?

$\vec{v} \parallel$ Tangente! , $\vec{v} \perp \vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$

da $\vec{a} \perp \vec{v}$, und $\vec{a}$ zur "*Kurveninnenseite*" zeigt $\Rightarrow \vec{a} \parallel (-\vec{r})$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ **zeigt zum Kreismittelpunkt!**
"Zentripetalbeschleunigung"

$|\vec{v}| = const. \Rightarrow$ Bogenlänge $\quad s = |\vec{v}| \cdot t = v \cdot t \quad$ (mit $s(0) = 0$!)

Mit φ im Bogenmaß …

$$s = \varphi \cdot R$$
$$vt = \varphi R$$
$$\varphi(t) = \frac{v}{R} t = \omega \cdot t$$

Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω : $\quad \omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}$ [Gl.1.1.19.]

allg. $\omega =$ ***"Winkeländerung pro Zeit",*** $\quad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$ [Gl.1.1.20.]

$$\varphi = \int \omega \, \mathrm{d}t \text{ , hier: } \varphi = \omega \cdot t$$

Periodendauer T: $\quad \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$ Frequenz $f = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi f$ [Gl.1.1.21.]

Drehbewegung:

Winkel	φ	Einh.: 1	(rad.)	**Bogenmaß!!!**
Winkelgeschwindigkeit	ω	Einh.: 1/s		
Winkelbeschleunigung	α	Einh.: $1/s^2$		

$$\omega(t) = \int \alpha(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{[Gl.1.1.22.]}$$
$$\varphi(t) = \int \omega(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{[Gl.1.1.23.]}$$

Bsp.: gleichf. beschl Drehbewegung

α=const. ; $\omega(t_1) = \omega_1$; $\varphi(t_1) = \varphi_1$

$$\omega(t) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t} \alpha(t')\, \mathrm{d}t' \qquad \omega(t) - \omega_1 = \alpha \cdot (t - t_1)$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t} \omega(t')\, \mathrm{d}t' \qquad \varphi(t) - \varphi_1 = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot (t - t_1)^2 + \omega_1 \cdot (t - t_1)$$

V e r g l e i c h	
1-dim. Bewegung	**Drehbewegung**
Ort, Weg s	Winkel φ
Geschwindigkeit $v = \dot{s}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{s}$	Winkelbeschleunig. $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

☞ Vergleich wird fortgesetzt!

☞ Merke: auch eine gleichförmige Kreisbewegung ist eine
b e s c h l e u n i g t e Bewegung!

$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} \neq \vec{0}$ **!!!**

z.Zw.d.Ü.:

- Beschreiben Sie die gleichf. Kreisbewegung eines Körpers in der x-y-Ebene durch den Orstvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$!

  geg.: Winkelgeschw.: ω
  Bahnradius: R,
  Drehr.: entgegen dem Uhrzeigers.,
  Anfangsbed.: bei *t=0* sei der Körper *y=0*

  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

- Wie groß ist $|\vec{r}|$? *Lösung durch* *a.) Nach-**Denken***
  *b.) Nach-**Rechnen***
- Bestimmen Sie $\varphi(t)$! *Lösungwege wie oben!*
- Bestimmen Sie rechnerisch den Geschw.-Vektor $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
- Zeigen Sie rechnerisch, dass $\vec{v} \perp \vec{r}$ ist!
- Bestimmen Sie rechnerisch den Beschleunigungs-Vektor $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
- Zeigen Sie, dass $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{r}$ ist, d.h. $\vec{a}(t) = -(\ldots) \cdot \vec{r}(t)$!
- Zeigen Sie rechnerisch, daß $\vec{a} \perp \vec{v}$ ist!
- Zeigen Sie, dass $|\vec{a}(t)|$ zeitlich konstant ist!

Ergebnis:

Zentripetalbeschleunigung

$$a_z = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R} \qquad \text{[Gl.1.1.24.]}$$